الشامل الكامل في الرياضيات
للتحضير لشهادة التعليم
المتوسط و التفوق بإمتياز
مع أكثر من 440
تمرين ومسألة
محلولة

سلسلة مدرستي

2013

الرياضيات

4AM

السنة الرابعة من التعليم المتوسط

hard_equation

منشورات الشهاب

الـرّيـاضـيـات

السنة الرابعة من التعليم الـمتوسط

طبعة ثانية منقحة

رابح بناني
مفتش التربية و التكوين

العربي داود
مفتش التربية و التعليم الأساسي

منشورات الشهاب

مقدمة

صمم هذا الكتاب في إطار مواصلة سلسلة "مدرستي" لمنشورات الشهاب. يحتوي على الأنشطة العددية و الأنشطة الهندسية و أنشطة تنظيم المعطيات المحددة في منهاج السنة الرابعة من التعليم المتوسط الذي شرع في تطبيقه ابتداء من سبتمبر سنة 2006.

لقد أعطيت أهمية بالغة للتوجيهات التربوية و التعليمية الواردة في منهاج الرياضيات أثناء بناء مختلف الأبواب المكونة لهذا الكتاب و ذلك من أجل التكفل الجيد بالمتعلم، و وضعه في مركز الفعل التربوي.

إن هيكلة هذا الكتاب بسيطة تجعل استعماله سهلا.

فهو يشمل 14 بابا منظما بنفس التصميم حيث نجد في كل باب الأجزاء التالية :

- الاستبيان المتعدد الإجابات.
- الأنشطة التحضيرية.
- المعارف.
- الطرائق.
- التمارين المحلولة.
- التمارين و المسائل.

أدرجت في نهاية الكتاب حلول موجزة للتمارين و المسائل، يطلع عليها المتعلّم بعد إنجازها.

تتميز الوضعيات المختلفة المقترحة بالوجاهة و الدقة حيث تحفز المتعلّم على البحث فيها و على إنجاز محاولات و وضع تخمينات ثم إثبات صحتها. هذا السلوك الإيجابي المنتظر من المتعلّم يسمح له باكتساب الكفاءات المنهجية و الكفاءات الرياضية المحددة في البرنامج.

نأمل أن يجد المتعلّم في هذا الكتاب ما ينمّي عنده الإرادة على التعلّم، كما نأمل أيضا أن يكون وسيلة تعليمية يستعين بها الأستاذ لإثراء دروسه.

ردمك : 978-9961-63-825-5.

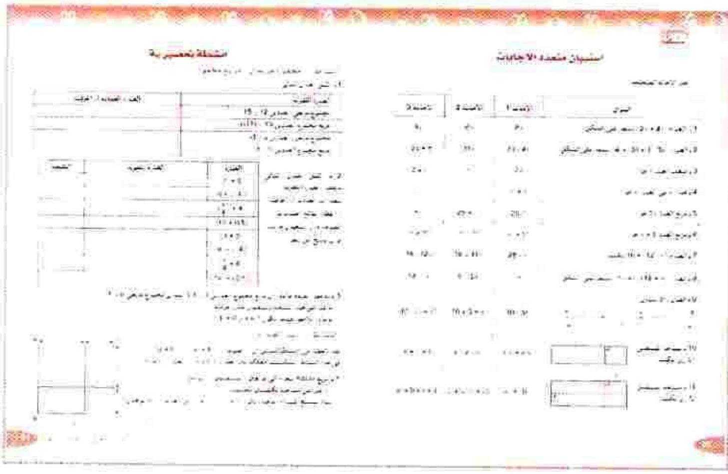
الإيداع القانوني : 2009 / 5270

منشورات الشهاب : 10، نهج ابراهيم غرفاء – باب الوادي – الجزائر 009 16.

www.chihab.com / E-mail : chihab@chihab.com

أنجز طبعه على مطابع عمار قرفي – باتنة

هيكلة الدرس

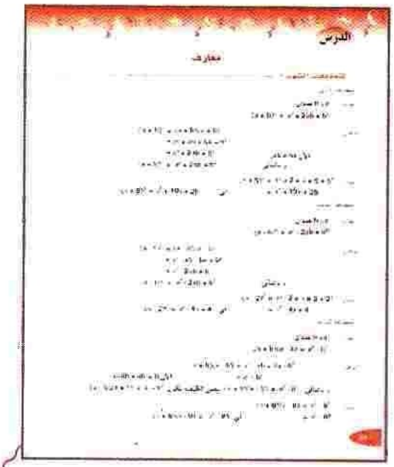


1 • الاستبيان المتعدد الإجابات

يهدف الاستبيان المتعدد الإجابات إلى التقويم التشخيصي للمكتسبات القبلية الضرورية المتعلقة بالمعارف المدرجة في كل باب. فهي تسمح للمتعلّم بمعالجة و تصحيح بعض الأخطاء العنيدة.

2 • الأنشطة التحضيرية

إن معالجتها تمكّن المتعلم من مقاربة المفاهيم الجديدة المقررة للتعلم انطلاقا من معارف و طرائق مكتسبة.



3 • معارف

يتضمن هذا الجزء التعاريف، النظريات، الخواص، النتائج و بعض الملاحظات لتثبيت هذه المعارف. لقد أرفقت بعض النظريات، الخواص و النتائج ببراهين تليها أمثلة للتوضيح.

4 • طرائق

تتعلق الطرائق المقررة بالمعارف الرياضية المعالجة.

أرفقت كل طريقة بتمرين تطبيقي و حل له، يبرز مراحل توظيف هذه الطريقة.

5 • تمارين محلولة

تعتبر التمارين المحلولة المدرجة في هذا الكتاب مرحلة من التعلم في الرياضيات. يتطلب حل هذه الوضعيات تجنيد معارف و طرائق معينة. و بذلك فهي تشكل نموذجا من إدماج معارف و طرائق.

6 • التمارين و المسائل

صحيح أو خاطئ يهدف هذا النشاط إلى التقويم التحصيلي بعد التعلم. فهو يسمح للمتعلّم بالحصول على أجوبة أولية متعلقة بفهم و توظيف مكتسباته.

التمارين إن الوضعيات المقترحة في هذا الجزء هي وضعيات تطبيقية. يواجه المتعلم هذه الوضعيات و يوظف معارف و طرائق معينة.

المسائل أدرجت في هذا الجزء مسائل متنوعة. إنها عبارة عن وضعيات مركبة و إدماجية يتطلب حلها تجنيد العديد من المعارف و الطرائق، فهي فرصة للمتعلم لإعادة استثمار مكتسباته و إثبات تحكّمه في الكفاءات المستهدفة و الكفاءات الرياضية المحددة.

الفهرس

1

الأعداد الطبيعية و الأعداد الناطقة

1 - قواسم عدد طبيعي
2 - مجموعة قواسم عدد طبيعي
3 - قاسم مشترك لعددين طبيعيين
4 - القاسم المشترك الأكبر
5 - العددان الأوليان فيما بينهما
6 - الكسور غير القابلة للإختزال

الخوارزمي
(788 - 850)

الجعفر محمد ابن موسى الخوارزمي هو رياضياتي عربي عاش في القرن التاسع. الكلمة خوارزم هو إسم لمنطقة تمتد حول بحر الآرال.
في القرن الثاني عشر، ترجم كتاب من كتب الخوارزمي حول الرياضيات الهندية إلى اللغة اللاتينية تحت العنوان «Algorismi» أي خوارزمية.
تشمل أعمال إقليدس ثلاثة عشر كتابا. ففي كتابه السابع، نجد الدراسة النظرية للقاسم المشترك الأكبر و تطبيقاتها المعروفة حاليا تحت عنوان : «خوارزمية إقليدس».

الكفاءات المستهدفة

(التي يجب اكتسابها)

- تعيين مجموعة قواسم عدد طبيعي.

- تعيين القاسم المشترك الأكبر لعددين.

- التعرف على عددين أولين فيما بينهما.

- كتابة كسر على شكل غير قابل للاختزال.

استبيان متعدد الإجابات

اختر الإجابة الصحيحة .

السؤال	الإجابة 1	الإجابة 2	الإجابة 3
1 . المساواة $53 = 5\times9 + 8$ تمثل القسمة الإقليدية	للعدد 53 على 5	للعدد 53 على 9	للعدد 53 على 8
2 . المساواة $47 = 4\times9 + 11$	تمثل القسمة الاقليدية للعدد 47 على 4	لا تمثل قسمة إقليدية	تمثل القسمة الاقليدية للعدد 47 على 9
3 . في القسمة الإقليدية يكون الباقي ...	أكبر من القاسم	أصغر من القاسم	فرديا
4 . يكون عدد طبيعي قابلا للقسمة على 2 إذا كان ...	مجموع أرقامه زوجيا	رقم وحداته زوجيا	رقم وحداته أكبر من 2
5 . يكون عدد طبيعي قابلا للقسمة على 3 إذا كان...	مجموع أرقامه فرديا	مجموع أرقامه زوجيا	مجموع أرقامه مضاعفا للعدد 3
6 . يكون عدد طبيعي قابلا للقسمة على 5 إذا كان ...	رقم وحداته 5 أو 0	رقم وحداته فرديا	مجموع أرقامه مضاعفا للعدد 5
7 . قبل اختزال الكسر $\frac{75}{18}$ ، نكتب كلا من البسط و المقام على شكل ...	مجموع عددين زوجين	فرق عددين فرديين	جداء عددين طبيعيين
8 . الكسر $\frac{5+75}{5\times38}$ يساوي ...	$\frac{75}{38}$	$\frac{75}{190}$	$\frac{8}{19}$

أنشطة تحضيرية

النشاط 1 - قواسم عدد طبيعي

1 • أ) 3 قاسم للعدد 63. نقول أن 63 قابل للقسمة على 3. ماذا يعني هذا ؟

ب) 4 و 5 لايقسمان 63. لماذا ؟

جـ) كل عدد طبيعي يقبل على الأقل قاسما.

ما هو هذا القاسم ؟

القاسم	القاسم المرفق	المساواة المبينة للقاسمين المرفقين
1	....	63 = 1× ....
....	....	....
....	....	....
....	....	....
....	....	....
....	....	....

2 • أ) بالنسبة للعدد 63، القاسم المرفق بالعدد 3 هو 21.

ماذا يعني هذا ؟

ب) أكمل الجدول المقابل بترتيب قواسم العدد 63 ترتيبا تصاعديا في العمود عن اليسار.

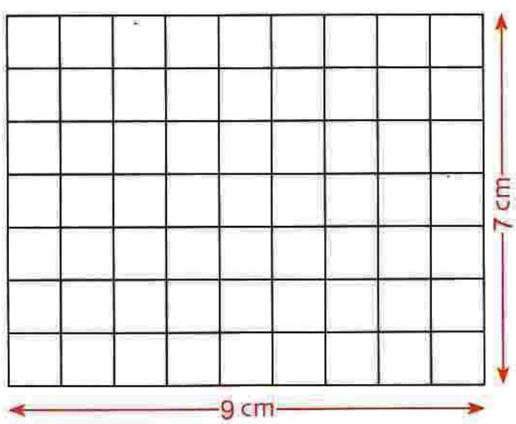
جـ) لماذا، في السطر الثالث، نكون قد عيّنّا كل قواسم العدد 63 ؟

د) اكتب قائمة كل قواسم العدد 63 مرتبة ترتيبا تصاعديا.

3 • نريد رسم مستطيل مساحته $63\ cm^2$، علما أن طوله و عرضه هما عددان طبيعيان. الشكل المقابل يبين وجود حل على الأقل، و هو مستطيل طوله 9 cm و عرضه 7 cm.

أ) أعط كل الإمكانيات لرسم المستطيل.

ب) ما هي العلاقة الموجودة بين قواسم عدد ؟



النشاط 2 - القواسم المشتركة لعددين طبيعيين

أ) عيّن كل قواسم العدد 28، ثم كل قواسم العدد 36.

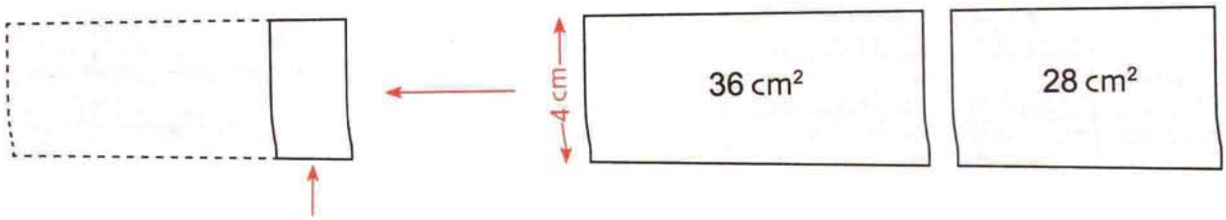
ب) عيّن كل القواسم المشتركة للعددين 28 و 36.

جـ) ما هو أكبر قاسم مشترك للعددين 28 و 36 ؟

النشاط 3 - خواص القواسم المشتركة لعددين طبيعيين

1 ـ أ) أجب على السؤال التالي بالاعتماد على الشكل الموالي.

- هل قاسم مشترك للعددين 28 و 36 هو قاسم للفرق 28 - 36 ؟



مستطيلان مساحتاهما $28\ cm^2$ و $36\ cm^2$.

مستطيل مساحته $8\ cm^2$.

ب) أجب على السؤال التالي بالإعتماد على الشكل الموالي.

- هل قاسم مشترك للعددين 28 و 36 هو قاسم للمجموع 36 + 28 ؟

مربعان مساحة كل منهما $8\ cm^2$ و $28\ cm^2$.

مربع مساحته $36\ cm^2$.

2 ـ a و b عددان طبيعيان غير معدومين حيث $a \geq b$.

- ماذا يمكن قوله عن القواسم المشتركة للعددين a و b و القواسم المشتركة للعددين b و a - b ؟
- وضح إجابتك باستعمال مستطيلات.

3 ـ أ) باستعمال السؤال 2 و الجدول الموالي،

أوجد القواسم المشتركة للعددين 28 و 36.

ملاحظة كتبنا في السطر 3 العدد 20 في عمود العدد a و 8 في عمود العدد b حتى يكون $a \geq b$.

ب) استعمل هذا الجدول لإيجاد القاسم المشترك الأكبر للعددين 28 و 36.

a	b	a - b
36	28	8
28	8	20
20	8	12
12	8	4
8	4	4
4	4	0

جـ) احسب بنفس الطريقة القاسم المشترك الأكبر للعددين 97 و 65، بإتمام الجدول التالي.

اشرح لماذا يمكن التوقف عن الحساب بدءا من السطر 4 . .

a	b	a - b
97	65	32
65		

ملاحظة تسمى هذه الطريقة، خوارزمية الفوارق لحساب القاسم المشترك الأكبر لعددين طبيعيين.

النشاط 4 - خوارزمية إقليدس

باستعمال الجدول التالي، احسب القاسم المشترك الأكبر للعددين 14 و 78، بتطبيق خوارزمية الفوارق.

نلاحظ في هذا الجدول أن العدد 14 يتكرر 5 مرات في عمود b.

a	b	a - b
78	14	

ب) إليك كيفية تجعل هذه الطريقة أسرع باستعمال القسمة الإقليدية.

انقل و أكمل الجدول المقابل.

تسمى هذه الطريقة، خوارزمية إقليدس لحساب القاسم المشترك الأكبر لعددين. إنه آخر باق غير معدوم في القسمات الإقليدية المتتالية.

a	b	القسمة الإقليدية للعدد a على b
78	14	$78 = 14\times5 + 8$
14	8	

2- احسب القاسم المشترك الأكبر للعددين 204 و 60 باستعمال خوارزمية إقليدس.

3- باستعمال الطريقة السابقة، أوجد كسرا غير قابل للإختزال مساويا للكسر $\frac{695}{260}$.

ملاحظة قبل اختزال الكسر $\frac{695}{260}$ ، نكتب كلا من العددين 695 و 260 على الشكل $695 = d\times a'$ و $260 = d\times b'$

حيث **d** هو القاسم المشترك الأكبر للعددين 695 و 260 مع التحقق أن a' و b' أوليان فيما بينهما.

معارف

1 - قواسم عدد طبيعي

a و b عددان طبيعيان حيث b يختلف عن 0.

تعريف b قاسم للعدد a يعني باقي القسمة الإقليدية للعدد a على b هو 0.

تعريف b قاسم للعدد a يعني يوجد عدد طبيعي q حيث $a = b \times q$.

ملاحظة إذا كان b قاسما للعدد a، نقول إن a يقبل القسمة على b و نقول أيضا إن a مضاعف b.

أمثلة
- 7 قاسم 35 لأن $35 : 7 = 5$ (لأن حاصل القسمة الإقليدية للعدد 35 على 7 هو 5 و الباقي هو 0).
- 6 ليس قاسما للعدد 45 (لأن باقي القسمة الإقليدية للعدد 45 على 6 هو 3 و هذا العدد يختلف عن 0).

2 - مجموعة قواسم عدد طبيعي

a عدد طبيعي.

تعريف مجموعة قواسم العدد a هي مجموعة الأعداد الطبيعية b التي تقسم a.

ملاحظات
- 1 هو قاسم لكل عدد طبيعي لأن من أجل كل عدد طبيعي a ؛ $a = a \times 1$.
- كل عدد طبيعي غير معدوم يقسم نفسه لأن من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم a ؛ $a = a \times 1$.
- كل عدد طبيعي غير معدوم هو يقسم العدد 0 لأن من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم a ؛ $0 = a \times 0$.

مثال مجموعة قواسم العدد 35 هي $\{35 ; 7 ; 5 ; 1\}$.

3 - قاسم مشترك لعددين طبيعيين

a ، b عددان طبيعيان.

تعريف نسمي قاسما مشتركًا للعددين a و b كل عدد طبيعي يقسم a و يقسم b.

ملاحظة 1 هو قاسم مشترك لكل عددين a و b.

مثال 3 هو قاسم مشترك للعددين 24 و 15 لأن $24 = 3 \times 8$ و $15 = 3 \times 5$

مجموعة قواسم العدد 24 هي $\{24 ; 12 ; 8 ; 6 ; 4 ; 3 ; 2 ; 1\}$.

مجموعة قواسم العدد 18 هي $\{18 ; 9 ; 6 ; 3 ; 2 ; 1\}$.

مجموعة القواسم المشتركة للعددين 24 و 18 هي $\{6 ; 3 ; 2 ; 1\}$.

4 - القاسم المشترك الأكبر لعددين طبيعيين

a ، b عددان طبيعيان.
من بين القواسم المشتركة للعددين a و b، يوجد قاسم أكبر من بقية هذه القواسم المشتركة.

تعريف نسمي العنصر الأكبر في مجموعة القواسم المشتركة للعددين a و b، القاسم المشترك الأكبر للعددين a و b و يرمز له pgcd (a ; b).

مثال مجموعة القواسم المشتركة للعددين 24 و 18 هي {6 ; 3 ; 2 ; 1}.
القاسم المشترك الأكبر للعددين 24 و 18 هو 6. نكتب : pgcd (24 ; 18) = 6.

5 - العددان الطبيعيان الأوليان فيما بينهما

a ، b عددان طبيعيان.

تعريف a ، b أوليان فيما بينهما يعني pgcd (a ; b) = 1.

مثال
- العددان 17 و 8 أوليان فيما بينهما لأن pgcd (17 ; 8) = 1.
- العددان 12 و 9 ليسا أوليين فيما بينهما لأن pgcd (12 ; 9) = 3 (أي pgcd (12 ; 9) ≠ 1).

6 - الكسور الغير قابلة للاختزال

a ، b عددان طبيعيان غير معدومين.

تعريف الكسر $\frac{a}{b}$ غير قابل للإختزال إذا و فقط إذا كان العددان a و b أوليين فيما بينهما.

مثال
- الكسر $\frac{25}{13}$ غير قابل للاختزال لأن pgcd (25 ; 13) = 1 (أي 25 و 13 أوليان فيما بينهما).
- الكسر $\frac{34}{18}$ قابل للاختزال لأن pgcd (34 ; 18) = 2.

نكتب $\frac{34}{18} = \frac{17 \times 2}{17 \times 2} = \frac{17}{9}$

بما أن pgcd (17 ; 9) = 1

فإن الكسر $\frac{17}{9}$ غير قابل للاختزال.

طرائق

1 - تعيين مجموعة قواسم عدد طبيعي

طريقة لتعيين مجموعة قواسم عدد طبيعي، نعين كل التفكيكات الممكنة على شكل جداء عاملين لهذا العدد.

تمرين عين مجموعة قواسم العدد 68.

حل لدينا :
$68 = 1 \times 68$
$68 = 2 \times 34$
$68 = 4 \times 17$

إذن مجموعة قواسم 68 هي $\{68 ; 34 ; 17 ; 4 ; 2 ; 1\}$.

2 - تعيين مجموعة القواسم المشتركة لعددين طبيعيين

طريقة لتعيين مجموعة القواسم المشتركة لعددين طبيعيين، نعين مجموعة قواسم كل من العددين ثم نستنتج مجموعة القواسم المشتركة.

تمرين عين مجموعة القواسم المشتركة للعددين 30 و 42.

حل لدينا :

$30 = 1 \times 30$	$42 = 1 \times 42$
$30 = 2 \times 15$	$42 = 2 \times 21$
$30 = 3 \times 10$	$42 = 3 \times 14$
$30 = 5 \times 6$	$42 = 6 \times 7$

مجموعة قواسم 30 هي $\{30 ; 15 ; 10 ; 6 ; 5 ; 3 ; 2 ; 1\}$.
و مجموعة قواسم 42 هي $\{42 ; 21 ; 14 ; 7 ; 6 ; 3 ; 2 ; 1\}$.
إذن مجموعة القواسم المشتركة للعددين 30 و 42 هي $\{6 ; 3 ; 2 ; 1\}$.

3 - حساب القاسم المشترك الأكبر لعددين طبيعيين

طريقة لحساب القاسم المشترك الأكبر لعددين طبيعيين، يمكن استعمال خوارزمية إقليدس.

لإيجاد القاسم المشترك الأكبر للعددين a و b حيث $a > b$ ؛ نجري القسمة الإقليدية للعدد a على b أي $a = bq + r$ حيث $0 \leq r < b$. إذا كان $r = 0$ فإن $\text{pgcd}(a ; b) = b$ و إذا كان $r \neq 0$ نواصل إجراء القسمات الإقليدية للعدد b على r و هكذا حتى نتحصل على باقي معدوم.
القاسم المشترك الأكبر للعددين a و b هو آخر باقٍ غير معدوم في القسمات الإقليدية المتتابعة.

تمرين عيّن القاسم المشترك الأكبر للعددين 218 و 162.

حل لدينا :

$$218 = 162\times1 + 56$$
$$162 = 56\times2 + 50$$
$$56 = 50\times1 + 6$$
$$50 = 6\times8 + \boxed{2}$$
$$6 = 2\times3 + 0$$

إذن : القاسم المشترك الأكبر للعددين 218 و 162 هو 2. أي $pgcd\ (218\ ;\ 162) = 2$

طريقة لحساب القاسم المشترك الأكبر لعددين طبيعيين يمكن إستعمال طريقة الفوارق.

تمرين عين القاسم المشترك الأكبر للعددين 261 و 203.

حل لدينا :

$$261 - 203 = 58$$
$$203 - 58 = 145$$
$$145 - 58 = 87$$
$$87 - 58 = 29$$
$$58 - 29 = \boxed{29}$$
$$29 - 29 = 0$$

إذن القاسم المشترك الأكبر للعددين 261 و 203 هو 29 أي $pgcd\ (261\ ;\ 203) = 29$.

4 - كتابة كسر على شكل كسر غير قابل للاختزال

طريقة لكتابة كسر $\frac{a}{b}$ على شكل كسر غير قابل للاختزال، نحسب القاسم المشترك الأكبر d للعددين a و b و يكون الكسر $\frac{a:d}{b:d}$ هو الكسر الغير قابل للاختزال الذي يساوي $\frac{a}{b}$.

تمرين أكتب الكسر $\frac{34}{51}$ على شكل كسر غير قابل للإختزال.

حل لدينا :

$$51 = 3 \times 34 + 17$$
$$34 = 2 \times 17 + 0$$

إذن $pgcd\ (51\ ;\ 43) = 17$

و بالتالي : $\frac{34}{51} = \frac{17 \times 2}{17 \times 3} = \frac{2}{3}$ أي $\frac{34}{51} = \frac{2}{3}$.

إذن الكسر $\frac{2}{3}$ هو الكسر غير القابل للاختزال الذي يساوي $\frac{34}{51}$.

طريقة إستعمال حاسبة عليمة

لجعل كسر على شكل كسر غير قابل للاختزال باستعمال حاسبة علمية، ننفذ البرنامج التالي :

ظهور النتيجة	=	صب المقام	$a^{b/c}$	صب البسط

تمرين إجعل كلا من الكسرين التاليين $\frac{36}{128}$ و $\frac{345}{165}$ على شكل كسر غير قابل للإختزال.

حل اختزال الكسر $\frac{36}{128}$.

تنفيذ البرنامج السابق :

9 ⅃ 32	=	128	$a^{b/c}$	36

ينتج أن : $\frac{9}{32} = \frac{36}{128}$

اختزال الكسر $\frac{345}{165}$.

بتنفيذ البرنامج السابق تظهر النتيجة التالية [11 ⅃ 12 ⅃ 1] على شاشة الحاسبة.

نكتب : $\frac{23}{11} = \frac{12}{11} + 1 = \frac{345}{165}$. إذن $\frac{23}{11} = \frac{345}{165}$.

طريقة إستعمال حاسبة بيانية

لجعل كسر على شكل كسر غير قابل للإختزال باستعمال حاسبة بيانية، ننفذ البرنامج التالي :

ENTER	MATH	صب المقام	÷	صب البسط	1. Frac	MATH

تمرين إجعل الكسر $\frac{285}{45}$ على شكل كسر غير قابل للإختزال.

حل تنفيذ البرنامج السابق :

ENTER	MATH	45	÷	285	1. Frac	MATH

تظهر النتيجة [285/45 ▸ Frac 57/9] على شاشة الحاسبة.

و نكتب : $\frac{57}{9} = \frac{285}{45}$.

تمارين محلولة

تمرين 1 1 • بيّن أن الكسر $\frac{170}{578}$ قابل للاختزال.

2 • احسب القاسم المشترك الأكبر للعددين 170 و 578.

3 • اكتب الكسر $\frac{170}{578}$ على شكل كسر غير قابل للاختزال.

حل 1 • نلاحظ أن العددين 170 و 578 يقبلان القسمة على 2. إذن الكسر $\frac{170}{578}$ قابل للاختزال.

2 • حساب القاسم المشترك الأكبر للعددين 170 و 578. (استعمال خوارزمية إقليدس)

لدينا :

$$578 = 170 \times 3 + 68$$
$$170 = 68 \times 2 + \boxed{34}$$
$$68 = 34 \times 2 + 0$$

إذن $pgcd\,(578\,;\,170) = 34$.

3 • نلاحظ أن $170 = 5 \times 34$ و $578 = 17 \times 34$

إذن $\frac{5}{17} = \frac{5 \times 34}{17 \times 34} = \frac{170}{578}$ و بالتالي : $\frac{5}{17} = \frac{170}{578}$.

ينتج أن $\frac{5}{17}$ هو الكسر الغير قابل للاختزال و الذي يساوي $\frac{170}{578}$.

تمرين 2 يوجد في كيس 161 قلما أحمر و 133 قلما أزرق. نريد وضعها في علب بحيث كل العلب تتضمن نفس عدد الأقلام وكل علبة تتضمن أقلاما من نفس اللون.

1 • ما هو أكبر عدد من الأقلام التي يمكن و ضعها في كل علبة ؟

2 • ما هو أكبر عدد من العلب من كل لون ؟

حل 1 • عدد الأقلام في كل علبة هو قاسم لكل من العددين 161 و 133، فهو قاسم مشترك لهما.

حساب القاسم المشترك الأكبر للعددين 161 و 133، باستعمال خوارزمية إقليدس.

$$161 = 133 \times 1 + 28$$
$$133 = 28 \times 4 + 21$$
$$28 = 21 \times 1 + \boxed{7}$$
$$21 = 7 \times 3 + 0$$

إذن $pgcd\,(161\,;\,133) = 7$.

و بالتالي : أكبر عدد من الأقلام التي يمكن وضعها في كل علبة هو 7.

2 • $161 = 7 \times 23$ و $133 = 7 \times 19$

يمكن تشكيل 23 علبة من الأقلام الحمراء و 19 علبة من الأقلام الزرقاء.

صحيح أو خاطئ

1 • 1 إذا كان عدد طبيعي a قاسما للعدد b فإن القاسم المشترك الأكبر للعددين a و b هو a.

2 • ليس عددين زوجين أوليين فيما بينهما.

3 • إن عددين فرديين أوليان فيما بينهما.

4 • العددان a و 1 أوليان فيما بينهما.

5 • الكسر $\frac{a}{b}$ قابل للاختزال إذا كان a و b أوليين فيما بينهما.

6 • الكسر $\frac{17}{1\,717}$ قابل للاختزال.

7 • الكسر $\frac{33}{484}$ غير قابل للاختزال.

تمارين

قواسم عدد طبيعي - القواسم المشتركة

2 • عيّن مجموعة قواسم كل من الأعداد التالية :

27 ؛ 45 ؛ 84.

3 • عيّن مجموعة قواسم كل من الأعداد التالية :

288 ؛ 169 ؛ 225.

4 • عيّن مجموعة القواسم المشتركة للعددين الطبيعيين في كل حالة من الحالات التالية :

أ) 42 و 56

ب) 76 و 48

جـ) 136 و 320

5 • عين مجموعة القواسم المشتركة للعددين في كل حالة من الحالات التالية :

أ) 73 و 75

ب) 44 و 66

جـ) 29 و 58

القسمة الإقليدية

6 • أنجز القسمة الإقليدية للعدد 1284 على العدد 273.

• حدد حاصل و باقي هذه القسمة.

• عبر عن هذه القسمة بواسطة مساواة.

7 نفس السؤال 6 بالنسبة للحالات التالية :

أ) 783 و 2 184

ب) 6 951 و 1 528

جـ) 8 585 و 375

القاسم المشترك الأكبر (PGCD)

8 • أوجد مجموعة القواسم المشتركة للعددين في كل حالة من الحالات التالية ثم استنتج القاسم المشترك الأكبر للعددين :

أ) 30 و 18

ب) 14 و 35

جـ) 75 و 125

د) 135 و 108

9 • أوجد القاسم المشترك الأكبر للعددين في كل حالة من الحالات التالية، باستعمال خوارزمية الفوارق :

أ) 50 و 90

ب) 299 و 235

جـ) 851 و 667

د) 13 305 و 7 983

10 • أوجد القاسم المشترك الأكبر للعددين 22 675 و 14 512 باستعمال خوارزمية الفوارق.

11 • أوجد القاسم المشترك الأكبر للعددين في كل حالة من الحالات التالية بأستعمال خوارزمية إقليدس.

أ) 103 و 39

ب) 749 و 115

جـ) 3 725 و 7 595

د) 71 037 و 224 512

12 • أوجد القاسم المشترك الأكبر للعددين
222 453 و 38 520 باستعمال خوارزمية إقليدس.

13 • احسب القاسم المشترك الأكبر d للعددين
201 و 192 باستعمال خوارزمية إقليدس.
• احسب حاصل قسمة كل من العددين $\frac{201}{d}$ و $\frac{192}{d}$.

العددان الأوليان فيما بينهما

14 • عيّن مجموعة القواسم المشتركة للعددان 54 و 79.
• ماذا تستنتج ؟

15 • هل العددان 38 و 125 أوليان فيما بينهما ؟

16 • أثبت أن العددين 69 و 259 أوليان فيما بينهما.

17 • أثبت أن العددين 135 و 108
ليسا أولين فيما بينهما.

18 1 • احسب القاسم المشترك الأكبر d للعددين
345 و 1 080 باستعمال خوارزمية إقليدس.
2 • احسب حاصل قسمة كل من العددين $\frac{345}{d}$ و $\frac{1\,080}{d}$.
3 • تحقق أن حاصلي القسمة الناتجين هما عددان أوليان فيما بيهما.

19 1 • احسب القاسم المشترك الأكبر d للعددين
18 440 و 1 384.
2 • احسب العددين $\frac{18\,440}{d}$ و $\frac{1384}{d}$
3 • تحقق أن العددين الناتجين أوليان فيما بينهما.

20 أ) عيّن مجموعة قواسم كل من العددين 54 و 36.
ب) ما هي مجموعة القواسم المشتركة للعددين 54 و 36 ؟
جـ) عيّن القاسم المشترك الأكبر d للعددين 54 و 36.
د) أكتب قائمة قواسم العدد d. ماذا تلاحظ ؟

21 • دون إجراء أي حساب، أثبت أن العددين التاليين ليس أوليان فيما بينهما في كل حالة من الحالات التالية :
1) 182 و 216
2) 39 و 15
3) 310 و 715

22 • أكتب قائمة قواسم كل من العدين 65 و 84.
• ما هو القاسم المشترك الأكبر للعددين 65 و 84؟
• ماذا تستنتج بالنسبة إلى العددين 65 و 84 ؟

الكسور الغير قابلة للإختزال

23 • إختزل كل كسر من الكسور التالية لجعله على شكل كسر غير قابل للإختزال.
$\frac{4}{14}$ ؛ $\frac{20}{35}$ ؛ $\frac{200}{450}$ ؛ $\frac{165}{490}$

24 • احسب المجاميع التالية و أكتب النتيجة على شكل كسر غير قابل للإختزال.
$1+\frac{2}{3}$ ؛ $3+\frac{4}{7}$ ؛ $5+\frac{1}{14}$
$2-\frac{1}{3}$ ؛ $\frac{3}{15}-3$ ؛ $-4+\frac{48}{15}$

25 • إختزل الكسر التالي لجعله على شكل كسر غير قابل للإختزال : $\frac{4\,242}{2\,844}$

26 • أكتب الكسور التالية على شكل كسر غير قابل للإختزال.
$\frac{10\,316}{20\,194}$ ؛ $\frac{4\,198}{512}$ ؛ $\frac{373\,020}{13\,184}$

27 • إستعمل حاسبة لكتابة الكسر $\frac{4\,920}{6\,835}$ على شكل كسر غير قابل للإختزال.

مسائل

28 1 • هل العددان 682 و 496 أوليان فيما بينهما ؟
• برر إجابتك.
2 • احسب القاسم المشترك الأكبر للعددين 682 و 496.
3 • اختزل الكسر $\frac{682}{496}$ و اجعله على شكل كسر غير قابل للاختزال (وضح طريقتك).

29 1 • أثبت أن العددين 65 و 42 أوليان فيما بينهما.
2 • برهن أن $\frac{65}{42} = \frac{520}{336}$.

30 • هل يمكن إيجاد عدد A محصور بين 195 و 235 بحيث $pgcd\ (A\ ;\ 288) = 24$ ؟
• إذا كانت الإجابة نعم، ما هو العدد A ؟

31 أ) في كل حالة من الحالات التالية، أُذكر إن كان العددان أوليين فيما بينهما.
5 و 7 ؛ 9 و 11 ؛ 13 و 15 ؛ 17 و 19 ؛ 25 و 27
• ماذا يمكن تخمينه ؟
ب) 1 • إذا كان عدد d يقسم كل من العددين a و b بحيث $a > b$ ؛ فماذا يمكن قوله عن العددين d و $a - b$ ؟
2 • استنتج أن كل عددين فرديين متتاليين هما عددان أوليان فيما بينهما.

32 نضع $A = \frac{n+9}{n-6}$ حيث n عدد طبيعي أكبر من 6.
1 • في كل حالة من الحالات التالية، عيّن الكسر غير القابل للاختزال المساوي A.
$n = 8$ ؛ $n = 25$ ؛ $n = 46$
2 • أثبت أن $A = 1 + \frac{15}{n-6}$
3 • استنتج قيم n التي يكون من أجلها A عددا طبيعيا.

33 1 • احسب القاسم المشترك الأكبر للعددين 110 و 88.
2 • اشترى رجل صفيحة حديدية طولها 110 cm و عرضها 88 cm و يريد تقطيعها لاستخراج مربعات متماثلة منها، ذات مساحة أكبر ما يمكن.
• ما هو ضلع كل مربع ؟
• ما هو عدد المربعات التي يمكن تقطيعها ؟

34 1 • احسب القاسم المشترك الأكبر للعددين 108 و 135.
2 • عند رضا 108 كرية حمراء و 135 كرية سوداء.
يريد تشكيل بها كميات ثم يضعها في أكياس بحيث :
• كل كيس يشمل نفس عدد الكريات الحمراء.
• كل كيس يشمل نفس عدد الكريات السوداء.
• توضع كل الكريات الحمراء و السوداء في الأكياس.
أ) ما هو عدد الأكياس التي يمكن تشكيلها ؟
ب) ما هو عدد الكريات الحمراء و عدد الكريات السوداء في الأكياس المكونة ؟

35 1 • احسب القاسم المشترك الأكبر للعددين 540 و 300.
2 • يريد شخص تبليط حجرة طولها 540cm و عرضها 300 cm بواسطة بلاطات مربعة متماثلة.
• ما هو طول ضلع البلاطة علما أنه يريد استعمال أقل عدد من البلاطات ؟
• ما هو عدد البلاطات التي يستعملها ؟

36 بمناسبة الاحتفال بعيد الأم، قطف بائع أزهار 182 زهرة بنفسج و 78 زهرة أقحوان.
يريد تشكيل باقات متماثلة بهذه الأزهار باستعمالها كلها.
1 • ما هو عدد الباقات من نفس نوع الأزهار التي يمكن تشكيلها ؟
2 • ما هو عدد الأزهار من كل نوع في كل باقة ؟

2

الحساب الحرفي
المتطابقات الشهيرة

1 - المتطابقات الشهيرة
2 - نشر عبارة جبرية
3 - تحليل عبارة جبرية

الحساب و الأعداد الكبيرة :

يريد رضا حساب الجداء : 807 345 29 × 781 265 49
يستحيل إستعمال الحاسبة، هذا ما يضنه، لأن الحاسبة لا تظهر النتيجة المطلوبة.
رغم هذا، لا يريد إنجاز الحساب باليد....
كيف يمكن لرضا حساب هذا الجداء ؟

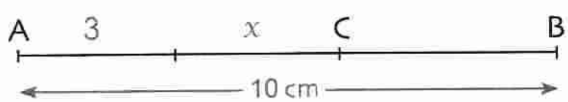
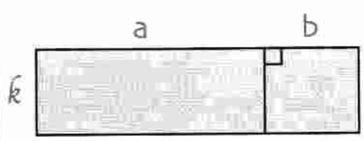
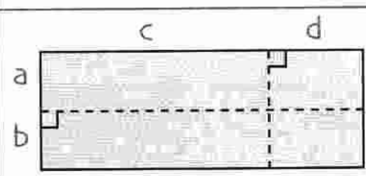
الكفاءات المستهدفة
(التي يجب اكتسابها)

- معرفة المتطابقات الشهيرة و توظيفها في الحساب المتمعن فيه و في النشر و التحليل.

- نشر أو تحليل عبارات جبرية بسيطة.

استبيان متعدد الإجابات

إختر الإجابة الصحيحة .

السؤال	الإجابة 1	الإجابة 2	الإجابة 3
1 • العبارة $2x + 4x$ تبسط على الشكل ...	$8x$	$6x$	$8x^2$
2 • العبارة $4 + 3a + 1 - 5a$ تبسط على الشكل ...	$7a - 4a$	$11a$	$-2a + 5$
3 • ضعف العدد x هو ...	$2x$	x^2	$2 + x$
4 • جداء x في العدد x^2 هو ...	$x^2 + x$	x^3	x^2
5 • مربع العدد $5x$ هو ...	$25x^2$	$25 + x^2$	$5x^2$
6 • مربع العدد $a + b$ هو ...	$a^2 + b^2$	$a^2 . b^2$	$(a + b)^2$
7 • العبارة $16 + (12 - x)$ تكتب ...	$28 - x$	$16 + 11x$	$16 - 12x$
8 • العبارة $(6 - a) - (12 + a)$ تبسط على الشكل ...	-6	$6 - 2a$	$18 - a$
9 • الطول BC يساوي ... 	$10 - 3x$	$10 + 3 + x$	$10 - (3 + x)$
10 • مساحة المستطيل الأزرق تكتب ... 	$ka + kb$	$k . a . b$	$k + a + b$
11 • مساحة المستطيل الأزرق تكتب ... 	$ac + bc$	$(a + b)(c + d)$	$a^2 + b^2 + c^2 + d^2$

أنشطة تحضيرية

النشاط 1 - مجموع مربعين - مربع مجموع

1 . أكمل الجدول التالي :

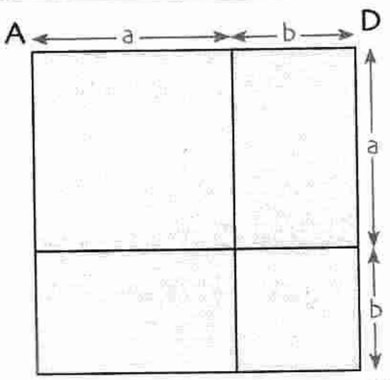
العبارة اللغوية	العبارة العددية أو الحرفية
مجموع مربعي العددين 12 و 15	
مربع مجموع العددين 19 و (17-)	
مجموع مربعي العددين a و 3-	
مربع مجموع العددين b و 1	

2 . أكمل الجدول التالي، بإعطاء العبارة اللغوية للعبارات العددية أو الحرفية و إعطاء نتائج الحسابات المقترحة دون استعمال حاسبة.
قارن نتائج كل سطر.

العبارة	العبارة اللغوية	النتيجة
$3^2 + 5^2$		
$[9 + (-4)]^2$		
$\left(\frac{1}{4}\right)^2 + 4^2$		
$(10 + 0,5)^2$		
$(3 + 5)^2$		
$9^2 + (-4)^2$		
$\left(\frac{1}{4} + 4\right)^2$		
$10^2 + (0,5)^2$		

3 . نلاحظ، بصفة عامة، أن مربع مجموع العددين a و b لا يساوي مجموع مربعي a و b.
- عبّر عن هذه النتيجة باستعمال عبارة حرفية.
- ماذا تلاحظ عندما يكون $a = 0$ و $b = 0$ ؟

النشاط 2 - نشر العبارة $(a + b)^2$



لقد لاحظنا في النشاط السابق أن : عموما $(a + b)^2 \neq a^2 + b^2$.
في هذا النشاط، سنكتشف العلاقة بين العبارة $(a + b)^2$ و العبارة $a^2 + b^2$.

1 . المربع ABCD مجزء إلى مربعين و مستطيلين. (الشكل)
أ) عبّر عن مساحته بكيفيتين مختلفتين.
ب) استنتج المساواة الموجودة بين $(a + b)^2$ و $a^2 + b^2$ في الحالة a و b موجبان.

2 • a و b عددان كيفيان.

أ) أُكتب $(a+b)^2$ على شكل جداء.

ب) أُنشر و بسّط هذا الجداء بتوزيع الضرب على الجمع. $(a+b)(a+b)$

جـ) ماذا تستنتج ؟

3 • أ) باستعمال المساواة $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

• أكمل حساب $31^2 = (30+1)^2 =$ ....

ب) احسب بنفس الكيفية 41^2 ؛ 82^2

النشاط 3 - نشر العبارة $(a-b)^2$

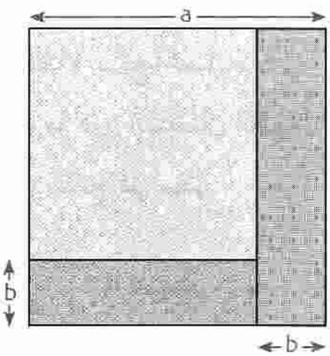
1 • نريد حساب العدد 99^2 بطريقة أبسط، مثل العدد 31^2 في النشاط السابق.

بما أن 99 قريب من 100 أي $99 = 100 - 1$.

نفضل حساب $(100-1)^2$ بدلا من 99^2.

أ) انشر $(a-b)^2$ و احسب $(100-1)^2$ بمواصلة الحساب التالي :

$99^2 = (100-1)^2 = (100+(-1))^2 =$ ....



(الشكل 1)

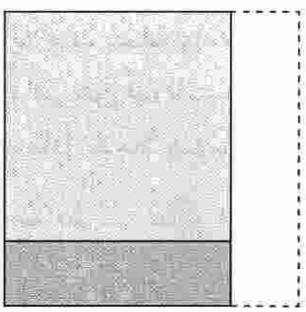
ب) a و b عددان كيفيان.

انشر $(a-b)^2$ باستعمال نفس الطريقة المطبقة في السؤال السابق أ).

2 • لقد تحصلنا على : $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

احسب 49^2 و 68^2 باستعمال هذه المساواة.

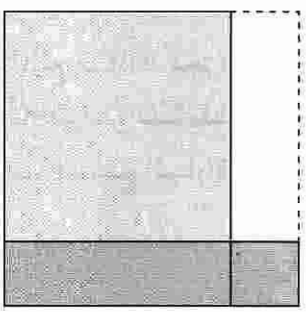
3 • أ)عبّر عن ضلع ثم مساحة المربع الملون بالأخضر. (الشكل 1)



(الشكل 2)

ب) في الشكل 2، لقد نزعنا المربع الأزرق.

عبّر عن مساحة الجزء الملون المتبقي بدلالة a و b.



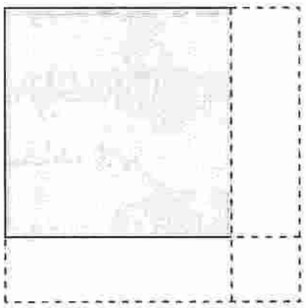
(الشكل 3)

جـ) في الشكل 3، أضفنا المربع الأصفر.

ما هي مساحة الجزء الملون ؟

د) ما هي مساحة الجزء الذي نزع للمرور من الشكل 3 إلى الشكل 4 ؟

استنتج عبارة جديدة لمساحة المربع الأخضر.



(الشكل 4)

هـ) ما هي المساواة التي نتحصل عليها باستعمال نتائج السؤالين أ) و د) ؟

النشاط 4 - نشر العبارة $(a + b)(a - b)$

a و b عددان كيفيان.

1 • انشر و بسط الجداء $(a + b)(a - b)$.

2 • لقد تحصلنا على عبارة مبسطة للجداء $(a + b)(a - b)$.

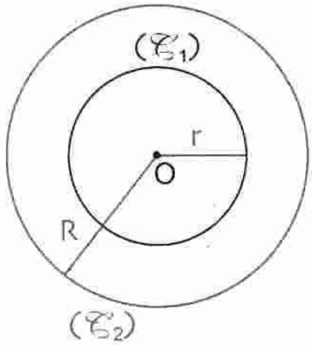
بدون استعمال حاسبة، و بدون وضع العمليات، احسب 91×89 ؛ $51^2 - 49^2$ ؛ $(63 + 3)(63 - 3)$ ؛ $35^2 - 5^2$.

النشاط 5 - نشر و تحليل عبارة

1 • الدائرتان $(\mathscr{C}_1)$ و $(\mathscr{C}_2)$ لهما نفس المركز O.

الفرق بين محيطاهما هو 2 m.

احسب الفرق R - r بين نصفي قطريهما.



2 • فكر قبل الحساب.

احسب ذهنيا العبارتين التاليتين :

$$4,5 \times 17 - 4,5 \times 36 + 4,5 \times 20$$

$$\frac{23}{4} \times 5,1 - 5,1 \times \frac{13}{4} - 5,1 \times \frac{10}{4}$$

3 • كل عبارة من العبارات التالية هي مجموع أو فرق.

اكتب كل واحدة منها على شكل جداء.

$A = 7x + 9x$ ؛ $B = 2(x + 5) - 17(x + 5)$

$C = (x - 1)(x + 2) - 3(x + 2)$ ؛ $D = 3x^2 + 8x$

$E = (1 - x)(x + 1)^2 + (x + 1)^2$ ؛ $F = x^2 - 9$

$G = x^2 + 10x + 25$ ؛ $H = x^2 - 6x + 9$

معارف

1 - المتطابقات الشهيرة

المتطابقة الأولى

نظرية a و b عددان.

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

البرهان

$$(a + b)^2 = (a + b)(a + b)$$
$$= a^2 + ab + ba + b^2$$
$$= a^2 + 2ab + b^2 \quad (\text{لأن } ab = ba)$$

و بالتالي : $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

مثال $(x + 5)^2 = x^2 + 2 \times x \times 5 + 5^2$
$= x^2 + 10x + 25$ أي $(x + 5)^2 = x^2 + 10x + 25$

المتطابقة الثانية

نظرية a و b عددان.

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

البرهان

$$(a - b)^2 = (a - b)(a - b)$$
$$= a^2 - ab - ba + b^2$$
$$= a^2 - 2ab + b^2$$

و بالتالي : $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

مثال $(x - 2)^2 = x^2 - 2 \times x \times 2 + 2^2$
$= x^2 - 4x + 4$ أي $(x - 2)^2 = x^2 - 4x + 4$

المتطابقة الثالثة

نظرية a و b عددان.

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

البرهان

$$(a + b)(a - b) = a^2 - ab + ba - b^2$$
$$= a^2 - b^2 \quad (\text{لأن } -ab + ab = 0)$$

و بالتالي : $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$. بنفس الكيفية يكون $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$

مثال $(x + 9)(x - 9) = x^2 - 9^2$
$= x^2 - 81$ أي $(x + 9)(x - 9) = x^2 - 81$

2 - نشر عبارة جبرية

تعريف نشر عبارة جبرية مكتوبة على شكل جداء يعني كتابتها على شكل مجموع جبري.

ملاحظة a، b، c، d أعداد

$c(a+b)=ca+cb$ ؛ $c(a-b)=ca-cb$ ؛ $(a+b)(c+d)=ac+ad+bc+bd$

لنشر العبارات الثلاث السابقة، استعملنا خاصية توزيع الضرب على الجمع.

مثال 1

$$(3x)(5x+3)=(3x)(5x)+(3x)(3)$$
$$=15x^2+9x$$
$$(2x)(x-4)=(2x)\times x-2x\times 4$$
$$=2x^2-8x$$
$$(2x-1)(3x-2)=(2x)(3x)-(2x)2-(3x)+2$$
$$=6x^2-4x+2$$

مثال 2

$$(9x+2)^2=(9x)^2+2(9x)\times 2+2^2$$
$$=81x^2+36x+4$$
$$(2x-5)^2=(2x)^2-2(2x)\times 5+5^2$$
$$=4x^2+20x+25$$
$$(4x+3)(4x-3)=(4x)^2-3^2$$
$$=16x^2-9$$

لنشر الجداءات الثلاث الواردة في المثال 2، استعملنا المتطابقات الشهيرة الثلاث.

3 - تحليل عبارة جبرية

تعريف تحليل عبارة جبرية مكتوبة على شكل مجموع يعني كتابتها على شكل جداء.

ملاحظة
- المجموع $ca+cb$ يحلل على الشكل $c(a+b)$ و ذلك باستخراج العامل المشترك c و نكتب $ca+cb=c(a+b)$.
- المجموع $ca-cb$ يحلل على الشكل $c(a-b)$ و ذلك باستخراج العامل المشترك c و نكتب $ca-cb=c(a-b)$.

مثال 1 $3x^2+6x=3x(x+2)$ (باستخراة العامل المشترك $3x$)

$16x^3-64x^2=16x^2(x-4)$ (باستخراة العامل المشترك $16x$)

مثال 2

$$9x^2+6x+1=(3x)^2+2(3x)\times 1+1^2$$
$$=(3x+1)^2$$
$$4x^2-12x+9=(2x)^2-2(2x)\times 3+3^2$$
$$=(2x-3)^2$$
$$25x^2-16=(5x)^2-4^2=(5x+4)(5x-4)$$

لتحليل العبارات الجبرية الواردة في المثال 2، استعملنا المتطابقات الشهيرة الثلاث.

طرائق

1 - نشر عبارة باستعمال المتطابقات الشهيرة

طريقة لنشر عبارة جبرية يمكن استعمال المتطابقات الشهيرة.

تمرين انشر ثم بسط كل عبارة من العبارات التالية : $(2x+3)^2$ ؛ $(4-3x)^2$

$10+(x-5)(x+5)$ ؛ $(4x+2)^2+3(1-x)^2$

حل 1 • نشر وتبسيط $(2x+3)^2$

هذه العبارة من الشكل $(a+b)^2$ حيث $a=2x$ و $b=3$ ونعلم أن $(a+b)^2=a^2+2b+b^2$

إذن نشر $(2x+3)^2$ يكون كما يلي :

$$(2x+3)^2 = (2x)^2+2(2x)\times 3+3^2$$
$$= 4x^2+12x+9$$

و بالتالي : $(2x+3)^2=4x^2+12x+9$

2 • نشر وتبسيط $(4-3x)^2$.

هذه العبارة من الشكل من الشكل $(a-b)^2$ حيث $a=4$ و $b=3x$

ونعلم أن $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$

إذن نشر $(4-3x)^2$ يكون كما يلي :

$$(4-3x)^2 = 4^2-2\times4\times(3x)+(3x)$$
$$= 16-24x+9x^2$$

و بالتالي : $(4-3x)^2 = 16-24x+9x^2$

3 • نشر وتبسيط $10+(x-5)(x+5)$

الجداء $(x-5)(x+5)$ من الشكل $(a-b)(a+b)$ الذي ينشر على a^2-b^2.

إذن $(x-5)(x+5)=x^2-25$ وبالتالي :

$$10+(x-5)(x+5) = 10+x^2-25$$
$$= x^2-15$$

إذن : $10+(x-5)(x+5)=x^2-15$

4 • نشر وتبسيط $(4x+2)^2+3(1-x)^2$

نشر وتبسيط العبارتين $(4x+2)^2$ و $(1-x)^2$

لدينا :

$$(4x+2)^2 = (4x)^2+2(4x)\times 2+2^2$$
$$= 16x^2+16x+4$$
$$(1-x)^2 = 1-2(1)(x)+x^2 = 1-2x+x^2$$

إذن :

$$(4x+2)^2+3(1-x)^2 = 16x^2+16x+4+3(1-2x+x^2)$$
$$= 16x^2+16x+4+3-6x+3x^2$$
$$= 19x^2+10x+7$$

وبالتالي : $(4x+2)^2+3(1-x)^2 = 19x^2+10x+7$

2 - تحليل عبارة باستخراج عامل مشترك

طريقة لتحليل عبارة جبرية نلاحظ وجود عامل مشترك ثم نستخرجه.

تمرين حلل كل من العبارتين التاليتين إلى جداء عوامل :

$A = (5x - 1)(4x + 2) - 2x(5x - 1)$ ؛ $B = 64x^2 + 12x$

حل 1 • تحليل A : نلاحظ أن $(5x - 1)$ هو عامل مشترك في العبارة A.

إذن

$$A = (5x - 1)(4x + 2) - (2x)(5x - 1)$$
$$= (5x - 1)[(4x + 2) - (2x)]$$
$$= (5x - 1)(2x + 2) = (5x - 1)[2\times(x + 1)]$$

ينتج أن : $A = 2(5x - 1)(x + 1)$

2 • تحليل B : نلاحظ أن $4x$ هو عامل مشترك في العبارة B.

إذن $B = 64x^2 + 12x = (4x)(16x) + (4x)\times 3 = (4x)(16x + 3)$

ينتج أن : $B = 4x(16x + 3)$

3 - تحليل عبارة باستعمال المتطابقات الشهيرة

طريقة لتحليل عبار جبرية نلاحظ إن كانت هذه العبارة تتضمن نشر لإحدى الجداءات $(a + b)^2$ ، $(a - b)^2$ و $(a + b)(a - b)$.

تمرين حلل كل من العبارتين التاليتين إلى جداء عوامل :

$A = 36x^2 + 12x + 1$ ؛ $B = 49 - 14x + x^2$ ؛ $C = (2x - 1)^2 - 25$

حل 1 • تحليل A :

$$A = 36x^2 + 12x + 1$$
$$= (6x)^2 + 2\times(6x)\times 1 + 1^2$$

نلاحظ أن هذه العبارة من الشكل $a^2 + 2ab + b^2$

إذن $36x^2 + 12x + 1 = (6x + 1)^2$ أي $A = (6x + 1)^2$

2 • تحليل B : $B = 49 - 14x + x^2 = 7^2 - 2\times(7)x + x^2$

نلاحظ أن هذه العبارة من الشكل $a^2 - 2ab + b^2$

إذن $49 - 14x + x^2 = (7 - x)^2$ أي $A = (7 - x)^2$

3 • تحليل C :

نلاحظ أن $(2x - 1)^2 - 25 = (2x - 1)^2 - 5^2$ هذه العبارة من الشكل $a^2 - b^2$

حيث $a = 2x - 1$ و $b = 5$

إذن :

$$C = (2x - 1)^2 - 25 = (2x - 1)^2 - 5^2$$
$$= (2x - 1 + 5)(2x - 1 - 5) = (2x + 4)(2x - 6)$$
$$= 2(x + 2)(x - 3)$$

وبالتالي : $C = 2(x + 2)(x - 3)$

تمارين محلولة

تمرين 1 أنشر و بسط العبارتين التاليتين : $A = (2x+1)^2 - (2x+1)(x-5)$

$B = (x-3)^2 - (3x+1)^2$

حل 1 • نشر و تبسيط A :

• نشر $(2x+1)^2$: لدينا : $(2x+1)^2 = (2x)^2 + 2(2x)\times 1 + 1^2$

$= 4x^2 + 4x + 1$

• نشر $(2x+1)(x-5)$: لدينا : $(2x+1)(x-5) = 2x^2 - 10x + x - 5$

$= 2x^2 - 9x - 5$

إذن $A = (2x+1)^2 - (2x+1)(x-5)$

$= 4x^2 + 4x + 1 - 2x^2 + 9x + 5$

وبالتالي : $A = 2x^2 + 13x + 6$

2 • نشر و تبسيط B :

• نشر $(x-3)^2$: لدينا : $(x-3)^2 = x^2 - 2(x)(3) + 3^2$

$= x^2 - 6x + 9$

• نشر $(3x+1)^2$: لدينا : $(3x+1)^2 = (3x)^2 + 2(3x)\times 1 + 1^2$

$= 9x^2 + 6x + 1$

إذن $B = (x-3)^2 - (3x+1)^2$

$= x^2 - 6x + 9 - (9x^2 + 6x + 1)$

$= x^2 - 6x + 9 - 9x^2 - 6x - 1$

وبالتالي : $B = -8x^2 - 12x + 8$

تمرين 2 حلل إلى جداء عوامل العبارة التالية : $A = 81 - x^2 + (9-x)(2x+3)$

حل 1 • لدينا : $81 - x^2 = (9+x)(9-x)$

• نلاحظ أن $9 - x$ هو عامل مشترك إذن $A = 81 - x^2 + (9-x)(2x+3)$

$= (9+x)(9-x) + (9-x)(2x+3)$

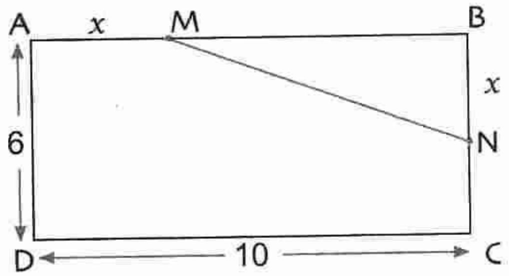
$= (9-x)\left[(9+x) + (2x+3)\right]$

$= (9-x)(3x+12)$

نلاحظ أن 3 هو عامل مشترك في العبارة : $3x + 12$ إذن $3x + 12 = 3(x+4)$

وبالتالي : $A = 3(9-x)(x+4)$

تمرين 3 الوحدة هي السنتيمتر . ABCD مستطيل ،
M و N نقطتان من الضلعين [AB] و [BC]
على الترتيب حيث $AM = BN = x$ (الشكل).



1 • احسب مساحة المثلث MBN بدلالة x .
2 • استنتج مساحة المضلع AMNCD بدلالة x .
3 • احسب قيمة مساحة المضلع AMNCD من أجل $x = 2$.
4 • ماهي طبيعة المضلع AMNCD من أجل $x = 6$.
احسب مساحته.

حل

1 • حساب مساحة المثلث MBN بدلالة x .
لتكن $\mathcal{A}_1$ مساحة المثلث MBN .
لدينا : $\mathcal{A}_1 = \frac{1}{2} MB \times BN$
نعلم أن $BN = x$ و $MB = AB - AM = 10 - x$
إذن : $\mathcal{A}_1 = \frac{1}{2} (10 - x) \times x$
ينتج أن : $\mathcal{A}_1 = 5x - \frac{1}{2} x^2$

2 • حساب مساحة المضلع AMNCD .
لتكن $\mathcal{A}_2$ مساحة المضلع AMNCD
لدينا : $\mathcal{A}_2 = 6 \times 10 - \mathcal{A}_1$ حيث 10×6 هي مساحة المستطيل ABCD
إذن : $\mathcal{A}_2 = 60 - (5x - \frac{1}{2} x^2)$ و بالتالي : $\mathcal{A}_2 = \frac{1}{2} x^2 - 5x + 60$

3 • حساب قيمة $\mathcal{A}_2$ من أجل $x = 2$.
من أجل $x = 2$ $\mathcal{A}_2 = \frac{1}{2} (2)^2 - 5\times2 + 60$
$= 2 - 10 + 60$
إذن من أجل $x = 2$ ؛ $\mathcal{A}_2 = 52$ أي مساحة المضلع AMNCD هي $52cm^2$.

4 • من أجل $x = 6$ ، النقطة N تنطبق على النقطة C .
المضلع AMNCD هو الشبه المنحرف AMCD ، قاعدتاه [AM] و [DC] .
يمكن حساب مساحته بكيفيتين.
• باستعمال الدستور : $\mathcal{A}_2 = \frac{1}{2} x^2 - 5x + 60$
من أجل $x = 6$ ، نجد : $\mathcal{A}_2 = 48cm^2$
• باستعمال دستور مساحة شبه المنحرف.
من أجل $x = 6$ ، نجد : $\mathcal{A}_2 = \frac{(AM + DC)}{2} \times AD$
$= \frac{(6 + 10)}{2} \times 6 = 48$

صحيح أو خاطئ

1 1 • العبارة $a^2 + b^2$ هي نشر الجداء $(a + b)^2$.

2 • العبارة $a^2 - b^2$ هي نشر الجداء $(a - b)^2$.

3 • ينشر الجداء $(x + 1)^2$ على الشكل $x^2 + 2x + 1$.

4 • ينشر الجداء $\left(\frac{1}{2} - x\right)^2$ على الشكل $x^2 - x + 1$.

5 • العبارة $x^2 + 10x + 25$ تحلل على الشكل $(5x + 1)^2$.

6 • العبارة $25x^2 + 10x + 1$ تحلل على الشكل $(x + 5)^2$.

7 • العبارة $121 - 64x^2$ تحلل على الشكل $(11 + 8x)(11 - 8x)$.

8 • العبارة $100 + 25x^2$ تحلل على الشكل $(10 + 5x)(10 - 5x)$.

تمارين

النشر والتبسيط

2 • انشر العبارات التالية :

$A = 5(2x + 6)$ ؛ $B = -4(1 - 4x)$

$C = -3(-y - 3)$ ؛ $D = 12(12x + 24)$

3 • انشر العبارات التالية :

$A = 3x(2x + 5)$ ؛ $B = -a(4 - a)$

$C = -2x(-x + 6)$ ؛ $D = \frac{3}{4}m(2 + m)$

4 • انشر و بسط العبارات التالية :

$A = (x + 2)(2x + 3)$ ؛ $B = (3y - 1)(y - 3)$

$C = (2 + 4t)(7 + 2t)$ ؛ $D = (z + 3)(1 - 3z)$

5 1 • انشر و بسط العبارة التالية :

$E = (3x + 2)(2x - 3)$

2 • احسب قيمة E من أجل $x = 1$ ثم من أجل $x = 0$.

6 • أنشر و بسط العبارات التالية :

$A = (0{,}5x + 1)(4x - 2)$

$B = (0{,}2y - 3)(-4y + 2)$

$C = \left(2z + \frac{1}{3}\right)(-3z + 2)$

7 • انشر و بسط العبارات التالية :

$A = (2x + 1)(-x + 4) - (2x + 1)(x - 2)$

$B = (x - 3)(x + 4) + (x + 3)(x - 4)$

$C = (2 + 3y)(y - 1) + y(y - 1)$

8 • طلب الأستاذ من التلاميذ نشر وتبسيط العبارة التالية : $E = 2(x - 3)\left(x + \frac{2}{3}\right)$

• رضا : نشر الجداء $2(x - 3)$ ثم ضرب النتيجة في $\left(x + \frac{1}{3}\right)$.

• ليلى : نشرت الجداء $2\left(x + \frac{1}{3}\right)$ ثم ضربت النتيجة في $(x - 3)$.

1 • استعمل طريقة رضا لنشر وتبسيط E.

2 • استعمل طريقة ليلى لنشر وتبسيط E.

3 • اقترح طريقة ثالثة لنشر E.

التحليل

9 • حلل العبارات التالية :

$A = (x + 1)(x - 2) + (2x - 4)$

$B = (4y - 12) - (y - 3)(2y + 5)$

$C = (2m - 3)(m + 4) - (3 - 2m)$

10 • حلل العبارات التالية : $A = 3x^2 + 12x$

$B = (2x + 1)(x - 2) + 3(x - 2)$

$C = (3 - x)(x + 4) + (3 + x)(x + 4)$

$D = x(x - 6) - x$

$E = x^2 - x(2x - 1)$

11 • حلل العبارات التالية : $E = 200 - 50x$

$F = 21a + 63$

$G = 7x^2 + 28x$

المتطابقات الشهيرة

12 • أنشر و بسط العبارات التالية :

$(x + 4)^2$ ؛ $(2x - 3)^2$ ؛ $(5 + x)^2$

$(3y + 7)^2$ ؛ $(20x + 4)^2$ ؛ $(10a + 0{,}1)^2$

13 • 1 احسب $\left(\frac{2}{3}\right)^2$

• احسب $2 \times \frac{2}{3} \times 5$

• انشر العبارة $\left(\frac{2}{3}\ x + 5\right)^2$

2 • انشر بنفس الكيفية العبارتين :

$\left(\frac{5}{4}\ x + 3\right)^2$ ؛ $\left(\frac{1}{7}\ x + 2\right)^2$

14 • احسب، بدون وضع العملية و بدون استعمال الحاسبة الأعداد التالية :

101^2 ؛ 1001^2 ؛ 72^2

15 • انشر وبسط العبارات التالية :

$A = (3x + 1)^2 + (x - 2)(4x - 3)$

$B = -4(x + 4)^2 + (2 + x)^2$

$C = 3x(x - 2) - (x + 4)^2$

$D = (2x - 1)(x + 1)^2$

16 • انشر وبسط العبارات التالية :

$(x - 3)^2$ ؛ $(2x - 4)^2$ ؛ $(5 - x)^2$

$\left(5 - \frac{1}{2}x\right)^2$ ؛ $\frac{1}{3}(4 - 3x)^2$ ؛ $(2 - 0,4x)^2$

17 • احسب، بدون وضع العملية وبدن استعمال الحاسبة الأعداد التالية :

69^2 ؛ 78^2 ؛ 99^2 ؛ 999^2

18 • انشر وبسط العبارات التالية :

$A = (3x - 4)^2 + (x - 1)^2$

$B = 2(2x - 3)^2 - (5x - 2)^2$

$C = (4x - 1)^2 - 3x(x + 2)$

19 • انشر وبسط العبارات التالية :

$(4x - 1)(4x + 1)$ ؛ $(1 + 2x)(1 - 2x)$

$\left(\frac{1}{2}\ x + 1\right)\left(\frac{1}{2}\ x - 1\right)$ ؛ $(7 + 3x)(7 - 3x)$

20 • احسب، بدون وضع العملية وبدن استعمال الحاسبة الأعداد التالية :

29×31 ؛ 102×98 ؛ 612×588

21 • انشر وبسط العبارات التالية :

$A = (3x - 4)^2$ ؛ $B = \left(2x + \frac{1}{4}\right)^2$

$C = x^2 - (x + 1)(x - 1)$ ؛ $D = (2 - 3x)^2 - 16$

$E = (x + 2)^2 - (3x + 1)(3x - 1)$

$F = (2x + 3)^2 - (x - 4)^2$

$G = \left(4 + \frac{1}{2}\ x\right)^2 + \left(4 - \frac{1}{2}\ x\right)^2 - 32$

22 • حلل العبارات وبسط العوامل في كل حالة من الحالات التالية :

$A = x^2 + 12x + 36$

$B = 4x^2 + 4x + 1$

$C = 16x^2 + 24x + 9$

$D = 64x^2 + 32x + 4$

23 • حلل العبارات التالية :

$A = 9x^2 - 6x + 1$

$B = 25y^2 - 10y + 1$

$C = 9x^2 - 18x + 9$

$D = 100x^2 - 40x + 4$

24 • أكمل كل عبارة من العبارات التالية للحصول على عبارة من الشكل :

$a^2 + 2b + b^2$ أو $a^2 - 2b + b^2$

$A = x^2 - 4x + ...$

$B = 4x^2 + 4x + ...$

$C = 16 + 8x + ...$

$D = 49x^2 - 14x + ...$

25 • احسب، بدون وضع العملية و بدون استعمال الحاسبة الأعداد التالية : $109^2 - 91^2$ ؛ $502^2 - 498^2$

26 • حلل العبارات التالية :

$E = 81x^2 + 90x + 25$

$F = 121x^2 - 44x + 4$

$G = (2x - 3)^2 - 9$

27 • حلل العبارات التالية :

$$A = \left(4x - \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{25}{16}$$

$$B = \frac{16}{9}x^2 - \frac{4}{3}x + \frac{1}{4}$$

$$C = (3x - 5)^2 - (x + 2)^2$$

$$D = 36x^2 - (6x - 1)^2 - 11$$

مسائل

28 أ) تحقق أن، من أجل كل عددين حقيقيين b ، c.

$$(b + c)^2 + (b - c)^2 = 2(b^2 + c^2)$$

ب) ABC مثلث قائم في A حيث

$AC + AB = 14\,cm$ و $AC - AB = 2\,cm$

• احسب AC و AB.

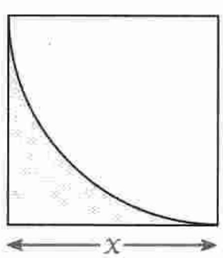
• استنتج الطول BC.

29 n عدد طبيعي غير معدوم.

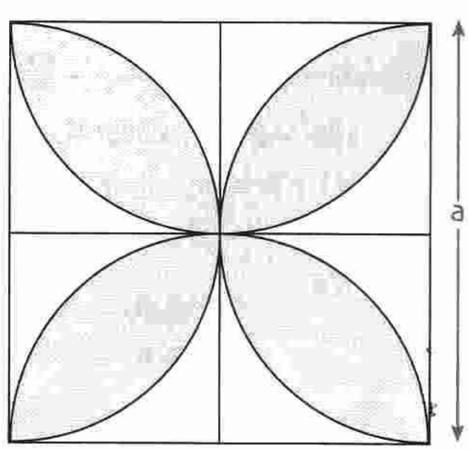
• برهن أن $n^3 - n$ هو جداء ثلاثة أعداد طبيعية متتابعة.

30 في الشكل التالي، الرباعي هو مربع ضلعه x، يحتوي على ربع دائرة نصف قطرها x.

أ) احسب بدلالة x مساحة الجزء الملون بالأزرق.



ب) أستنتج مساحة الزهرة الزرقاء بدلالة a.



31 1 • حلل العبارتين التاليتين:

$$A = 9 - 12x + 4x^2$$

$$B = (3 - 2x)^2 - 4$$

2 • استنتج تحليلا للعبارة : $C = (9 - 12x + 4x^2) - 4$

3 • بين أنه من أجل $x = \frac{3}{2}$ ؛ العبارة C هي عدد صحيح.

32 نعتبر العبارة A بحيث

$$A = 4x^2 - 81 + (x - 3)(2x + 3)$$

1 • انشر و بسط A.

2 • حلل العبارة $4x^2 - 81$ ثم استنتج تحليلا للعبارة A.

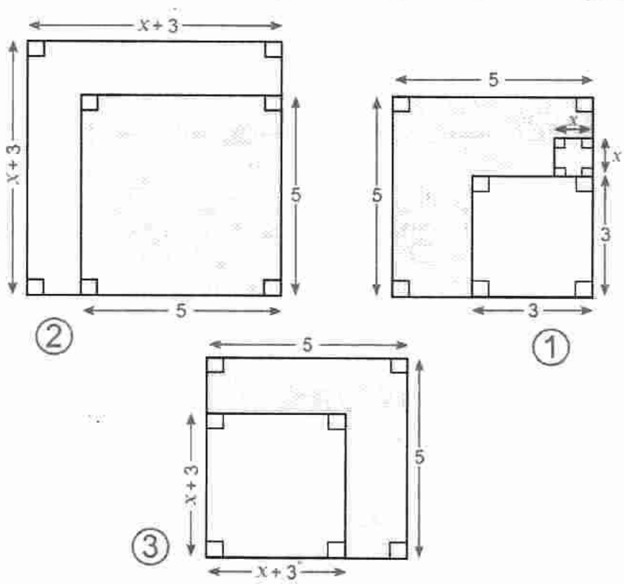
33 نعتبر العبارة E بحيث

$$E = (3x + 1)(6x - 9) - (2x - 3)^2$$

1 • انشر و بسط E.

2 • حلل العبارة $6x - 9$ ثم استنتج تحليلا للعبارة E.

34 1 • ما هو الشكل الملون الذي مساحته $25 - (x + 3)^2$ ؟



2 • نضع $E = 25 - (x + 3)^2$

• انشر و بسط E.

• حلل E إلى جداء عوامل.

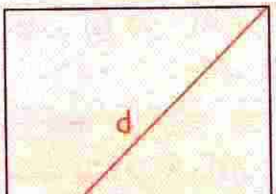
• احسب قيمة E من أجل $x = 2$.

3

الجذور التربيعية

1 - تقديم مختلف أنواع الأعداد
2 - تعريف
3 - خاصية
4 - العمليات على الجذور التربيعية
5 - حل معادلات من الشكل $x^2 = a$

فيثاغورث (القرن السادس قبل الميلاد)



لقد اهتم العلماء التابعين للمدرسة الفيثاغورثية في القرن السادس قبل الميلاد بالمشكل التالي :
« نعتبر المربع الذي طول ضلعه 1 و طول قطره d. احسب d ».
كان هؤلاء العلماء يعتقدون أن كل الأعداد هي أعداد ناطقة، أي يمكن التعبير عنها على شكل كسر، بسطه و مقامه عددان طبيعيان إلا أنهم فشلوا في إثبات أن العدد d هو عدد ناطق.

الكفاءات المستهدفة

(التي يجب اكتسابها)

- تعريف الجذر التربيعي لعدد موجب.

- معرفة قواعد الحساب على الجذور التربيعية و استعمالها لتبسيط عبارات تتضمن جذورا تربيعية.

استبيان متعدد الإجابات

إختر الإجابة الصحيحة.

السؤال	الإجابة 1	الإجابة 2	الإجابة 3
1 • مربع العدد 5 هو ...	5	10	25
2 • مربع العدد 5 - هو ...	- 25	- 10	25
3 • العدد الموجب الذي مربعه 9 هو ...	81	3	- 3
4 • العدد السالب الذي مربعه 9 هو ...	- 81	3	- 3
5 • ABC مثلث. إذا كان $BC^2 = AB^2 + AC^2$ فإن المثلث...	متساوي الساقين	متقايس الأضلاع	قائم في A
6 • ABC مثلث قائم في A. إذن ...	$AB^2 = AC^2$	$BC^2 = AB^2 + AC^2$	$BC^2 = AB \times AC$
7 • a ، b عددان. $(a + b)^2$ يساوي ...	$a^2 + b^2$	$a^2 \times b^2$	$a^2 + 2ab + b^2$
8 • a ، b عددان. $(a - b)^2$ يساوي ...	$a^2 - b^2$	$- a^2 \times b^2$	$a^2 - 2ab + b^2$
9 • a ، b عددان. $(a + b)(a - b)$ يساوي ...	$a^2 - b^2$	$a^2 - 2ab + b^2$	$a^2 + 2ab + b^2$
10 • العبارة $x^2 + x + \frac{1}{4}$ تحلل على الشكل...	$(x + 2)^2$	$\left(x + \frac{1}{2}\right)^2$	$x(x + 1) + \frac{1}{4}$
11 • العبارة $x^2 + 6x - 9$ تحلل على الشكل...	$(x - 9)^2$	$(x + 3)^2$	$(3 - x)^2$
12 • العبارة $1 - x^2 \frac{1}{36}$ تحلل على الشكل...	$(6x - 1)^2$	$\left(\frac{1}{6} x - 1\right)\left(\frac{1}{6} x + 1\right)$	$(x - 6)^2$

أنشطة تحضيرية

النشاط 1

1. أنقل و أكمل الجدولين التاليين :

x	- 7	- 6	- 5	- 4	- 3	- 2	- 1	0
x^2								

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9
x^2									

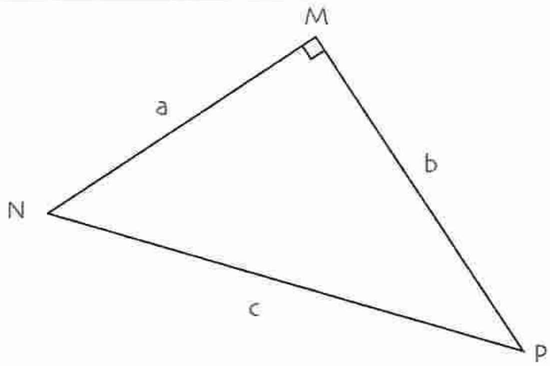
باستعمال الجدول السابق، احسب ذهنيا $0{,}3^2$ ؛ $0{,}5^2$ ؛ 80^2 ؛ 90^2

2. ماذا يمكن القول عن مربعي عددين متعاكسين ؟

النشاط 2

نعتبر المثلث القائم في M، أطوال أضلاعه a، b، c. (الشكل).

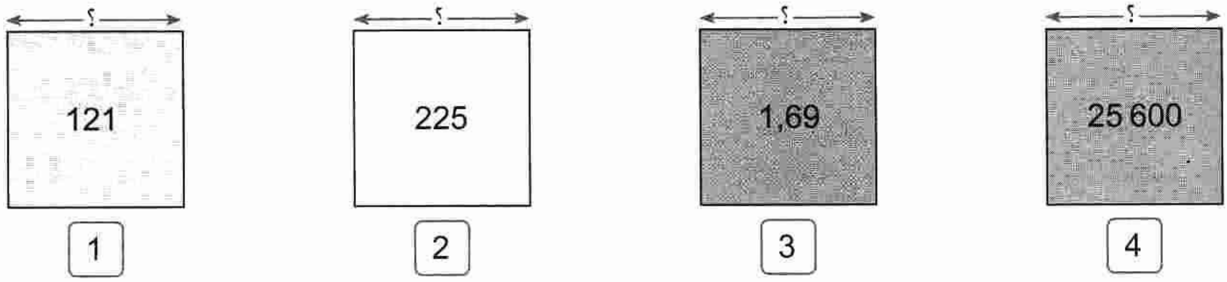
- أكمل الجدول التالي، دون استعمال الحاسبة.
- أعط القيم المضبوطة.



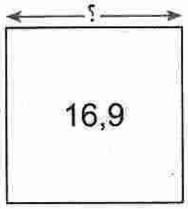
a	3	5	8	90	1,2	2
b	4		15			
c		13		150	2	6,25

النشاط 3

1. في كل شكل من الأشكال التالية، عيّن طول ضلع المربع ثم أعط القيمة المضبوطة له.



4. عبّر عن طول ضلع المربع التالي. هل يمكن تعيين القيمة المضبوطة له ؟



3 • يظهر على شاشة الحاسبة العدد 4,110 960 958 عند ما نطلب حساب $\sqrt{16,9}$

أ) برهن أن $\sqrt{16,9}$ لا يساوي 4,110 960 958.

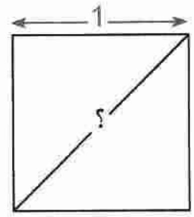
ب) هل القيمة التي تظهرها الحاسبة للعدد $\sqrt{2}$ مضبوطة ؟

جـ) أجب على نفس الأسئلة بالنسبة للعددين $\sqrt{3}$ و $\sqrt{5}$.

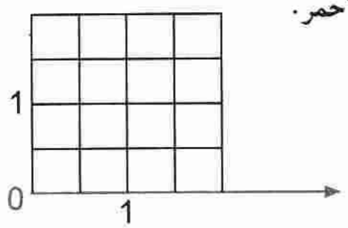
4 • فيما يلي نبين كيف يمكن وضع العدد $\sqrt{2}$ على محور.

أ) طول ضلع المربع هو 1

• ماهو طول قطره ؟

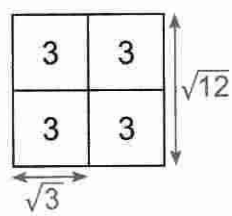


ب) استعمل السؤال أ) السابق لتمثيل $\sqrt{2}$ على المحور الأحمر.

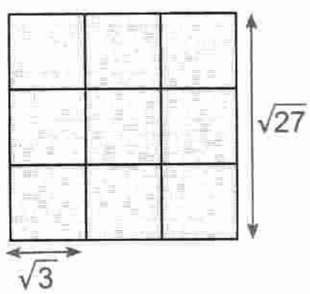


النشاط 4

1 • استعمل الشكل التالي لإعطاء كتابة أخرى للعدد $\sqrt{12}$



2 • أجب عن سؤال بالنسبة إلى العدد $\sqrt{27}$ بالإعتماد على الشكل التالي.



3 • باستغلال المثالين السابقين، اكتب على شكل آخر الأعداد $\sqrt{28}$ ؛ $\sqrt{54}$ ؛ $\sqrt{75}$.

4 • استنتج قاعدة عامة من الأمثلة السابقة.

النشاط 5

1 • هل يمكن أن يكون مربع عدد سالبا ؟ لماذا ؟

2 • ماذا يظهر على شاشة حاسبة إذا أدخلنا $\sqrt{-3}$ و $-\sqrt{3}$ ؟ علق على ما تلاحظه ؟

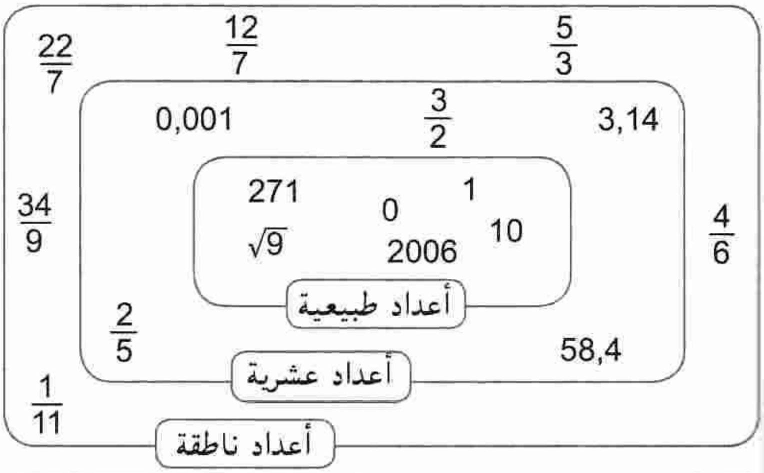
3 • x عدد موجب. أكمل الجدول التالي :

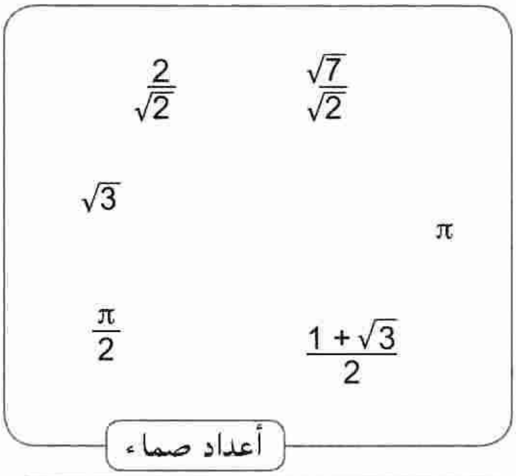
x	1,1		1,3		1,5		1,7		1,9
x^2		1,44		1,96		2,56		3,24	

معارف

1 - تقديم مختلف أنواع الأعداد

إليك تقديم لمختلف أنواع الأعداد بواسطة بعض الأمثلة.





الأعداد الناطقة هي الأعداد التي تكتب على شكل كسر بسطه ومقامه عددان صحيحان.

الأعداد الصماء هي الأعداد غير الناطقة.

تعريف الجذر التربيعي للعدد الموجب a هو العدد الموجب الذي مربعه يساوي a.

يرمز للجذر التربيعي للعدد الموجب a بالرمز $\sqrt{a}$ ويقرأ الجذر التربيعي للعدد a.

ينتج من التعريف السابق أن : من أجل كل عدد موجب a ، $(\sqrt{a})^2 = a$

أمثلة
1. $\sqrt{9} = 3$ لأن $3^2 = 9$
2. $\sqrt{0,04} = 0,2$ لأن $(0,2)^2 = 0,04$
3. $\sqrt{10^4} = 10^2$ لأن $(10^2)^2 = 10^4$
4. $\sqrt{0} = 0$ و $\sqrt{1} = 1$

خاصية من أجل كل عدد موجب a ، $\sqrt{a^2} = a$.

البرهان $\sqrt{a^2}$ هو العدد الموجب الذي مربعه يساوي a^2.

و نعلم أن a هو العدد الموجب الذي مربعه a^2. و بالتالي : $\sqrt{a^2} = a$

أمثلة $\sqrt{4^2} = 4$ ؛ $\sqrt{(0,3)^2} = 0,3$

ملاحظة الكتابة $-\sqrt{a}$ تمثل معاكس العدد الموجب $\sqrt{a}$ و بالتالي $-\sqrt{a}$ عدد سالب.

2- العمليات على الجذور التربيعية

خاصية
- من أجل كل عددين موجبين a ، b : $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$
- من أجل كل عددين موجبين a ، b : $\sqrt{a^2 \times b} = a\sqrt{b}$
- من أجل كل عددين موجبين a ، b حيث $b \neq 0$: $\sqrt{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$

البرهان • $(\sqrt{ab})^2 = ab$ و $(\sqrt{a} \times \sqrt{b})^2 = (\sqrt{a})^2 (\sqrt{b})^2 = a \times b$ و بالتالي : $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$

• لدينا : $\sqrt{a^2 b} = \sqrt{a^2} \times \sqrt{b} = a \times \sqrt{b}$

• لدينا : $\left(\sqrt{\frac{a}{b}}\right)^2 = \frac{a}{b}$ و $\left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\right)^2 = \frac{(\sqrt{a})^2}{(\sqrt{b})^2} = \frac{a}{b}$. و بالتالي : $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$.

أمثلة
- $\sqrt{63} = \sqrt{9 \times 7} = \sqrt{9} \times \sqrt{7} = 3\sqrt{7}$
- $\sqrt{28} = \sqrt{4 \times 7} = \sqrt{4} \times \sqrt{7} = 2\sqrt{7}$
- $\sqrt{75} = \sqrt{25 \times 3} = \sqrt{25} \times \sqrt{3} = 5\sqrt{3}$
- $\sqrt{32} = \sqrt{16 \times 2} = \sqrt{16} \times \sqrt{2} = 4\sqrt{2}$
- $\sqrt{\frac{4}{5}} = \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$
- $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$
- $\sqrt{\frac{1}{7}} = \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{7}} = \frac{1}{\sqrt{7}}$

ملاحظة من أجل كل عدد موجب تماما a ، $\sqrt{\frac{1}{a}} = \frac{1}{\sqrt{a}}$.

ملاحظة 1• $\sqrt{64 + 36} = \sqrt{100} = 10$

$\sqrt{64} + \sqrt{36} = 8 + 6 = 14$ إذن $\sqrt{64 + 36} \neq \sqrt{64} + \sqrt{36}$

2• $\sqrt{25 - 9} = \sqrt{16} = 4$

$\sqrt{25} - \sqrt{9} = 5 - 3 = 2$ إذن $\sqrt{25 - 9} \neq \sqrt{25} - \sqrt{9}$

عموما $\sqrt{a + b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$ و $\sqrt{a - b} \neq \sqrt{a} - \sqrt{b}$ حيث $a > b$

3 - حل معادلات من الشكل $x^2 = a$

خاصية a عدد كيفي.
- إذا كان $a > 0$ فإن المعادلة $x^2 = a$ تقبل حلين هما $\sqrt{a}$ و $-\sqrt{a}$.
- إذا كان $a = 0$ فإن المعادلة $x^2 = a$ تقبل حلا واحدا هو 0 .
- إذا كان $a < 0$ فإن المعادلة $x^2 = a$ لا تقبل حلا.

البرهان نفرض أن $a > 0$.

المعادلة $x^2 = a$ تكتب $x^2 - a = 0$

و تكتب أيضا : $x^2 - (\sqrt{a})^2 = 0$ أو $(x - \sqrt{a})(x + \sqrt{a}) = 0$.

إذن $x - \sqrt{a} = 0$ أو $x + \sqrt{a} = 0$ (خاصية الجداء المعدوم)

و بالتالي : $x = \sqrt{a}$ أو $x = -\sqrt{a}$.

- من أجل $a = 0$ ، المعادلة $x^2 = a$ تكتب $x^2 = 0$ أي $x \times x = 0$ إذن $x = 0$.
- نعلم أن مربع كل عدد هو عدد موجب.

إذن : إذا كان $a < 0$ فإن المعادلة $x^2 = a$ لا تقبل حلا. (لأن x^2 موجب و a سالب تماما).

أمثلة المعادلة $x^2 = 2$ تقبل حلين هما $\sqrt{2}$ و $-\sqrt{2}$.

المعادلة $x^2 = 16$ تقبل حلين هما 4 و -4 .

المعادلة $x^2 = -8$ لا تقبل حلا.

طرائق

1 - إستعمال تعريف الجذر التربيعي لعدد موجب لإنجاز حساب

طريقة لإنجاز حسابات تتضمن الجذور التربيعية، نستعمل تعريف الجذر التربيعي لعدد موجب وخواص العمليات الجبرية.

تمرين 1. انشر $(1+\sqrt{3})^2$.

2. استنتج الجذر التربيعي للعدد $4+2\sqrt{3}$.

حل 1. لدينا: $(1+\sqrt{3})^2 = 1^2 + 2\times1\times\sqrt{3} + \sqrt{3}^{\,2}$

$= 1 + 2\sqrt{3} + 3 = 4 + 2\sqrt{3}$

إذن : $(1+\sqrt{3})^2 = 4 + 2\sqrt{3}$

2. لدينا: $(1+\sqrt{3})^2 = 4 + 2\sqrt{3}$

إذن : $\sqrt{4+2\sqrt{3}} = \sqrt{(1+\sqrt{3})^2}$

بما أن $\sqrt{3}+1$ عدد موجب فإن $\sqrt{(1+\sqrt{3})^2} = 1+\sqrt{3}$ إذن $\sqrt{4+2\sqrt{3}} = 1+\sqrt{3}$

و بالتالي : الجذر التربيعي للعدد $4+2\sqrt{3}$ هو $1+\sqrt{3}$.

2 - إستعمال جذور تربيعية في الحساب

طريقة لإنجاز و تبسيط حساب يتضمن جذورا تربيعية، نستعمل تعريف الجذر التربيعي لعدد موجب و العمليات المعرفة عليها وخواص العمليات الجبرية.

تمرين1 A عدد معرف كما يلي : $A = x^2 - 5x + 1$

احسب قيمة A من أجل $x = 1+\sqrt{2}$

حل نعوض x بالعدد $1+\sqrt{2}$ في العبارة $x^2 - 5x + 1$

نجد $A = (1+\sqrt{2})^2 - 5(1+\sqrt{2}) + 1$

$= 1 + 2\sqrt{2} + 2 - 5 - 5\sqrt{2} + 1$ لأن $2\sqrt{2} - 5\sqrt{2} = (2-5)\sqrt{2} = -3\sqrt{2}$

إذن : $A = -1 - 3\sqrt{2}$

و بالتالي من أجل $x = 1+\sqrt{2}$ لدينا: $A = -1 - 3\sqrt{2}$

تمرين 2 حلل إلى جداء عوامل العدد B حيث $B = 9x^2 - 2$.

حل لدينا : $B = 9x^2 - 2 = (3x)^2 - (\sqrt{2})^2$

$= (3x - \sqrt{2})(3x + \sqrt{2})$

إذن : $B = (3x - \sqrt{2})(3x + \sqrt{2})$

3 - تبسيط كتابة على الشكل $a\sqrt{b}$

طريقة لكتابة $\sqrt{N}$ على الشكل $a\sqrt{b}$ ، نحاول كتابة N على الشكل a^2b حيث a ، b عددان موجبان

و يكون : $\sqrt{N} = \sqrt{a^2b} = a\sqrt{b}$

تمرين 1. اكتب على الشكل $a\sqrt{b}$ الأعداد التالية : $\sqrt{45}$ ؛ $\sqrt{54}$ ؛ $\sqrt{108}$

2. بسط العبارة $S = \sqrt{72} - \sqrt{32} + 8\sqrt{2}$

حل 1. لدينا :

$$\sqrt{45} = \sqrt{9\times5} = \sqrt{9}\times\sqrt{5} = 3\sqrt{5}$$
$$\sqrt{54} = \sqrt{9\times6} = \sqrt{9}\times\sqrt{6} = 3\sqrt{6}$$
$$\sqrt{108} = \sqrt{36\times3} = \sqrt{36}\times\sqrt{3} = 6\sqrt{3}$$

2. لدينا :

$$\begin{aligned} S &= \sqrt{72} - \sqrt{32} + 8\sqrt{2} \\ &= \sqrt{36\times2} - \sqrt{16\times2} + 8\sqrt{2} \\ &= \sqrt{6^2\times2} - \sqrt{4^2\times2} + 8\sqrt{2} \\ &= 6\sqrt{2} - 4\sqrt{2} + 8\sqrt{2} = 10\sqrt{2} \end{aligned}$$

إذن : $S = 10\sqrt{2}$

4 - كتابة عبارة من الشكل $\frac{a}{\sqrt{b}}$ أو $\frac{a}{\sqrt{b}-\sqrt{c}}$ على شكل نسبة مقامها عدد ناطق

طريقة
- لكتابة عبارة من الشكل $\frac{a}{\sqrt{b}}$ على شكل نسبة مقامها عدد ناطق نضرب كلا من بسطها و مقامها في $\sqrt{b}$
- لكتابة عبارة من الشكل $\frac{a}{\sqrt{b}-\sqrt{c}}$ على شكل نسبة مقامها عدد نضرب كلا من بسطها و مقامها في العدد $(\sqrt{b}+\sqrt{c})$.

ملاحظة
- $\frac{a}{\sqrt{b}} = \frac{a\sqrt{b}}{\sqrt{b}\times\sqrt{b}} = \frac{a\sqrt{b}}{(\sqrt{b})^2} = \frac{a\sqrt{b}}{b}$
- $\frac{a}{\sqrt{b}-\sqrt{c}} = \frac{a(\sqrt{b}+\sqrt{c})}{(\sqrt{b}-\sqrt{c})(\sqrt{b}+\sqrt{c})} = \frac{a(\sqrt{b}+\sqrt{c})}{(\sqrt{b})^2-(\sqrt{c})^2} = \frac{a(\sqrt{b}+\sqrt{c})}{b-c}$

تمرين أكتب الأعداد التالية على شكل نسبة مقامها عدد ناطق : $\frac{2}{\sqrt{3}}$ ؛ $\frac{5}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}$ ؛ $\frac{2}{\sqrt{7}-3}$.

حل

$$\frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$\frac{5}{\sqrt{2}-\sqrt{3}} = \frac{5(\sqrt{2}+\sqrt{3})}{(\sqrt{2}-\sqrt{3})(\sqrt{2}+\sqrt{3})} = -5(\sqrt{2}+\sqrt{3})$$

$$\frac{2(\sqrt{7}+3)}{(\sqrt{7}-3)(\sqrt{7}+3)} = \frac{2(\sqrt{7}+3)}{7-9} = \frac{2(\sqrt{7}+3)}{-2} = -\sqrt{7}-3$$

تمارين محلولة

تمرين 1 1. x و y عددان حيث $x = 2\sqrt{2} - 1$ و $y = 2\sqrt{2} + 1$

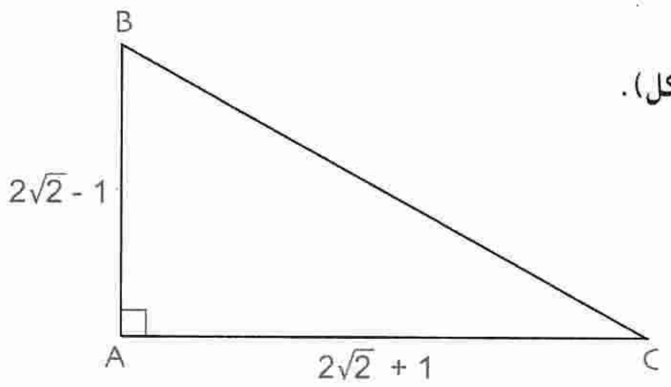
أ) احسب x^2 و y^2 و أعط النتيجتين على الشكل $a + b\sqrt{2}$ حيث a و b عددان صحيحان.

ب) أثبت أن $x \times y$ هو عدد طبيعي.

2. ABC مثلث قائم في A. (لاحظ الشكل).

أ) احسب القيمة المضبوطة للوتر BC.

ب) احسب مساحة المثلث ABC.



حل

1. أ) حساب x^2 و y^2

$$x^2 = (2\sqrt{2} - 1)^2 = (2\sqrt{2})^2 - 4\sqrt{2} + 1$$
$$= 8 - 4\sqrt{2} + 1$$
إذن : $x^2 = 9 - 4\sqrt{2}$

$$y^2 = (2\sqrt{2} + 1)^2 = (2\sqrt{2})^2 + 4\sqrt{2} + 1$$
$$= 8 + 4\sqrt{2} + 1$$
إذن : $y^2 = 9 + 4\sqrt{2}$

ب) حساب $x \times y$

$$x \times y = (2\sqrt{2} - 1)(2\sqrt{2} + 1) = (2\sqrt{2})^2 - 1 = 8 - 1$$

إذن : $x \times y = 7$ و بالتالي : $x \times y$ عدد طبيعي

2. أ) حساب القيمة المضبوطة للوتر BC

نطبق نظرية فيثاغورث في المثلث القائم ABC

ونكتب : $BC^2 = AB^2 + AC^2$ حيث $AB = x$ و $AC = y$

إذن : $BC^2 = x^2 + y^2$
$$= 9 - 4\sqrt{2} + 9 + 4\sqrt{2}$$

و بالتالي : $BC^2 = 18$ إذن : $BC = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$.

ينتج أن القيمة المضبوطة للوتر BC هي $3\sqrt{2}$.

ب) حساب مساحة المثلث ABC

مساحة المثلث ABC هي العدد S حيث $S = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC$

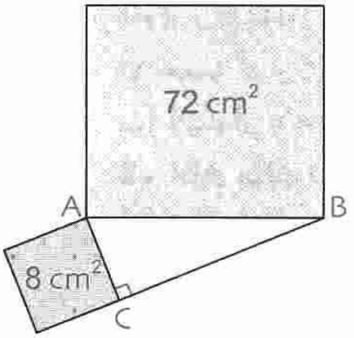
و نعلم أن $AB = x$ و $AC = y$ إذن $S = \frac{1}{2} \cdot x \cdot y$ أي $S = \frac{7}{2}$.

تمرين 2 يوجد في الشكل المقابل مثلث قائم، مربع مساحته $8\,cm^2$ و مربع آخر مساحته $72\,cm^2$.

1 . احسب القيمتين المضبوطتين لكل من الطولين AC و AB.
اعط النتائج على الشكل $a\sqrt{b}$ حيث a و b عددان طبيعيان و b أصغر ما يمكن.

2 . احسب القيمة المضبوطة لكل للطول BC.

3 . باستعمال السؤالين 1 و 2، احسب :
أ) القيمة المضبوطة لمساحة المثلث ABC .
اكتب النتيجة على الشكل $a\sqrt{b}$ حيث a و b عددان طبيعيان و b أصغر ما يمكن.
ب) احسب القيمة المضبوطة لمحيط المثلث ABC .
اكتب النتيجة على الشكل $a + b\sqrt{c}$ حيث a، b، c أعداد طبيعية و c أصغر ما يمكن.



حل

1 . حساب AC و AB

AC هو ضلع المربع الذي مساحته $8\,cm^2$. إذن $AC^2 = 8cm^2$

و بالتالي : $AC = \sqrt{8}$ أي $AC = 2\sqrt{2}\ cm$

AB هو ضلع المربع الذي مساحته $72\,cm^2$. إذن $AB^2 = 72cm^2$

و بالتالي : $AB = \sqrt{72}$ أي $AB = 6\sqrt{2}\ cm$

2 . BC هو ضلع الزاوية القائمة في المثلث ABC . حسب نظرية فيثاغورث، نكتب $AC^2 + BC^2 = AB^2$

أي $8 + BC^2 = 72$.

و بالتالي : $BC^2 = 64$. ينتج أن : $BC = \sqrt{64}$ أي $BC = 8cm$

3 . أ) حساب مساحة المثلث ABC

لتكن $\mathcal{A}$ مساحة المثلث ABC .

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BC$$

$$= \frac{1}{2} \times 2\sqrt{2} \times 8 = 8\sqrt{2}$$

إذن: $\mathcal{A} = 8\sqrt{2}\ cm^2$

أ) حساب محيط المثلث ABC

ليكن $\mathcal{P}$ محيط المثلث ABC ،

لدينا : $\mathcal{P} = AB + AC + BC = 6\sqrt{2} + 2\sqrt{2} + 8 = 8 + 8\sqrt{2}$

و بالتالي : $\mathcal{P} = (8 + 8\sqrt{2})cm$

صحيح أو خاطئ

1
- للعددين 5 - و 5 نفس المربع.
- للعدد 25 جذر تربيعي واحد هو 5.
- للعدد 25 - جذر تربيعي واحد هو 5 -.
- يوجد جذر تربيعي لكل عدد.
- الجذر التربيعي لعدد موجب هو دائما موجود.
- الجذر التربيعي لعدد طبيعي هو عدد طبيعي.
- إذا كان a و b عددين موجبين فإن $\sqrt{a^2b} = a\sqrt{b}$.
- إذا كان a عددا موجبا فإن $\sqrt{a^3} = a^2$.
- إذا كان a و b عددين موجبين فإن $\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$
- إذا كان a و b عددين موجبين فإن $\sqrt{a-b} = \sqrt{a} - \sqrt{b}$
- إذا كان a عدد موجب فإن $\sqrt{a^4} = a^2$.
- إذا كان b عدد موجب تماما فإن $\sqrt{\frac{1}{b}} = b$.

تمارين

استعمال تعريف الجذر التربيعي

2 • اكتب الأعداد التالية على شكل عدد طبيعي أو عدد عشري :

$\sqrt{25}$ ؛ $\sqrt{400}$ ؛ $\sqrt{0,01}$

$\sqrt{2\,500}$ ؛ $\sqrt{1,44}$ ؛ $\sqrt{0,0\,001}$

3 • اكتب الأعداد التالية على شكل عدد طبيعي :

$\sqrt{0}$ ؛ $\sqrt{1}$ ؛ $\sqrt{900}$ ؛ $\sqrt{16\,900}$

4 • اكتب الأعداد التالية على شكل عدد عشري :

$\sqrt{1.21}$ ؛ $\sqrt{0,49}$ ؛ $\sqrt{2,25}$ ؛ $\sqrt{2,89}$

5 • اكتب الأعداد التالية على شكل قوة للعدد 10 :

$\sqrt{10^2}$ ؛ $\sqrt{10^4}$ ؛ $\sqrt{10^6}$ ؛ $\sqrt{10^8}$ ؛ $\sqrt{10^{-2}}$ ؛ $\sqrt{10^{-8}}$

6 • احسب مربعات الأعداد التالية :

$\sqrt{0.001}$ ؛ $5\sqrt{10}$ ؛ $4\sqrt{3}$ ؛ $2\sqrt{2}$ ؛ $\sqrt{204}$ ؛ $\sqrt{11}$

بإمكانك إستعمال الخاصية $(a \cdot b)^2 = a^2 \cdot b^2$

7 • احسب مربعات الأعداد التالية :

$\sqrt{\frac{1}{3}}$ ؛ $\sqrt{\frac{200}{3}}$ ؛ $-\sqrt{\frac{7}{4}}$ ؛ $\sqrt{\frac{3}{2}}$ ؛ $-\sqrt{17}$ ؛ $-\sqrt{5}$

إنتبه : مربع عدد هو دائما عدد موجب.

8 • أكتب الأعداد التالية دون استعمال الرمز $\sqrt{\ }$ إن أمكن.

$\sqrt{13^2}$ ؛ $\sqrt{(-5)^2}$ ؛ $\sqrt{(1-\sqrt{2})^2}$ ؛ $\sqrt{\pi^2}$ ؛ $\sqrt{(\pi-3)^2}$

$\sqrt{(3+\pi)^2}$ ؛ $\sqrt{(\pi-5)^2}$ ؛ $\sqrt{(6-\sqrt{6})^2}$

انتبه : الجذر التربيعي لعدد موجب هو دائما عدد موجب.

إستعمال المساواة $\sqrt{a^2b} = a\sqrt{b}$

9 • اكتب الأعداد التالية على الشكل $a\sqrt{b}$.

$\sqrt{18}$ ؛ $\sqrt{20}$ ؛ $\sqrt{44}$ ؛ $\sqrt{75}$ ؛ $\sqrt{200}$ ؛ $\sqrt{242}$

10 • نفس السؤال 9 بالنسبة للأعداد التالية :

$\sqrt{128}$ ؛ $\sqrt{500}$ ؛ $\sqrt{108}$ ؛ $\sqrt{245}$

$\sqrt{405}$ ؛ $\sqrt{99}$ ؛ $\sqrt{605}$

11 • اكتب الأعداد التالية على الشكل $\sqrt{n}$:

$3\sqrt{2}$ ؛ $2\sqrt{3}$ ؛ $3\sqrt{3}$ ؛ $5\sqrt{7}$

$6\sqrt{11}$ ؛ $4\sqrt{13}$

إستعمال المساواة $\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$

12 • احسب الأعداد التالية :

$\sqrt{4 \times 16}$ ؛ $\sqrt{100 \times 9}$ ؛ $\sqrt{25 \times 81}$

$\sqrt{121 \times 49}$ ؛ $\sqrt{10^4 \times 10^{-2}}$

13 • احسب الأعداد التالية :

$\sqrt{0,01 \times 4}$ ؛ $\sqrt{64 \times 0,0\,001}$ ؛ $\sqrt{0,25 \times 0,36}$

$\sqrt{0,49 \times 1,21}$ ؛ $\sqrt{245 \times 0,2}$ ؛ $\sqrt{12,5 \times 8}$

ملاحظة : يمكنك استعمال المساواة المذكورة سابقا أو حساب العدد تحت الجذر التربيعي.

14 • احسب الأعداد التالية :

$\sqrt{3} \times \sqrt{27}$ ؛ $\sqrt{8} \times \sqrt{2}$ ؛ $\sqrt{5} \times \sqrt{20}$

$\sqrt{0,1} \times \sqrt{360}$ ؛ $\sqrt{8} \times \sqrt{0,5}$ ؛ $\sqrt{3} \times \sqrt{12}$

استعمال المساواة $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$

15 • احسب العدد $\frac{\sqrt{242}}{\sqrt{2}}$ و أعط النتيجة على شكل عدد طبيعي.

16 • احسب الأعداد التالية و أعط النتائج على شكل عدد طبيعي.

$\frac{\sqrt{637}}{\sqrt{13}}$ ؛ $\frac{\sqrt{448}}{\sqrt{7}}$ ؛ $\frac{\sqrt{75}}{\sqrt{3}}$ ؛ $\frac{\sqrt{224}}{\sqrt{2}}$ ؛ $\frac{\sqrt{48}}{\sqrt{3}}$ ؛ $\frac{\sqrt{18}}{\sqrt{2}}$

17 • احسب الأعداد التالية و أعط النتيجة على شكل كسر.

$\sqrt{\frac{1}{2\,500}}$ ؛ $\sqrt{\frac{400}{900}}$ ؛ $\sqrt{\frac{1}{324}}$ ؛ $\sqrt{\frac{144}{121}}$ ؛ $\sqrt{\frac{36}{49}}$ ؛ $\sqrt{\frac{25}{4}}$

18 • اكتب الأعداد التالية على شكل نسبة مقامها عدد ناطق.

$\frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{8}}$ ؛ $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}$ ؛ $\frac{1}{\sqrt{3}}$ ؛ $\frac{3}{\sqrt{2}}$

$\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{6}}$ ؛ $\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{6}}$

19 • اكتب الكسور التالية على شكل نسبة مقامها عدد ناطق.

$\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}-1}$ ؛ $\frac{\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}$ ؛ $\frac{1}{\sqrt{2}-1}$

$\frac{\sqrt{12}+\sqrt{27}}{1-\sqrt{3}}$ ؛ $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1}$

20 • اكتب العدد $a = \frac{1}{2+\sqrt{3}} + \frac{1}{2-\sqrt{3}}$

على أبسط شكل.

• هل هو عدد ناطق أو عدد طبيعي ؟

حساب وتبسيط عبارات

21 • بسط الكتابات التالية :

$\sqrt{3\times10^{-3}} \times \frac{\sqrt{6\times10^{2}}}{\sqrt{7,5}}$ ؛ $\sqrt{0,4\times10^{-2}} \times \sqrt{16\times10^{5}}$

$\frac{\sqrt{15\times10^{5}} \times \sqrt{3\times10^{-3}}}{\sqrt{5\times10^{5}}}$ ؛ $\frac{\sqrt{2,5\times10^{4}}}{\sqrt{9\times10^{3}}}$

22 • بسّط الكتابات التالية :

$\sqrt{8} + 3\sqrt{18}$ ؛ $4\sqrt{3} + 2\sqrt{12}$ ؛ $3\sqrt{2} + 5\sqrt{8}$

$\sqrt{19} - 5\sqrt{76}$ ؛ $8\sqrt{50} - \sqrt{98}$ ؛ $7\sqrt{45} - \sqrt{20}$

23 A عبارة جبرية حيث : $A = x^2 + x + \sqrt{2}$

• احسب قيمة العبارة A من أجل قيم x التالية :

$x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ؛ $x = -2\sqrt{2}$ ؛ $x = 3\sqrt{2}$ ؛ $x = \sqrt{2}$

$x = 1+\sqrt{2}$ ؛ $x = 2-\sqrt{2}$

النشر

24 • انشر و بسط العبارات التالية :

$\sqrt{2}(\sqrt{2}-\sqrt{3})$ ؛ $\sqrt{2}(\sqrt{2}+\sqrt{3})$

$5\sqrt{10}(\sqrt{20}+2\sqrt{15})$ ؛ $\sqrt{3}(\sqrt{6}-\sqrt{3})$

25 • انشر و بسط العبارات التالية :

$\frac{\sqrt{3}}{3}(\sqrt{3}-6)$ ؛ $\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\sqrt{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

$2\sqrt{5}\left(\sqrt{5}+\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$ ؛ $\sqrt{3}\left(\sqrt{6}-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$

26 • انشر و بسط العبارات التالية :

$(\sqrt{2}-\sqrt{3})^2$ ؛ $(1+\sqrt{2})^2$ ؛ $(5+\sqrt{3})^2$

$(\sqrt{7}-\sqrt{5})(\sqrt{7}+\sqrt{5})$ ؛ $(5-\sqrt{3})(5+\sqrt{3})$

$(\sqrt{5}-2\sqrt{3})^2$ ؛ $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2$ ؛ $(2\sqrt{3}+3\sqrt{2})^2$

التحليل

27 • حلّل باستخراج عامل مشترك :

$\sqrt{2}+\sqrt{10}$ ؛ العامل المشترك هو $\sqrt{2}$.

$\sqrt{6}+\sqrt{3}$ ؛ العامل المشترك هو $\sqrt{3}$.

$3+\sqrt{3}$ ؛ العامل المشترك هو $\sqrt{3}$.

$3\sqrt{10}-\sqrt{15}$ ؛ العامل المشترك هو $\sqrt{5}$.

28 • حلّل إلى جداء عاملين باستعمال المتطابقات الشهيرة :

$x^2+2\sqrt{2}\,x+2$ ؛ $x^2-2\sqrt{3}\,x+3$

$3-x^2$ ؛ $2-9x^2$

$2x^2-2\sqrt{2}\,x+1$ ؛ $\frac{1}{2}x^2+\sqrt{2}\,x+1$

حل معادلات من الشكل $x^2=a$

29 • حل كل معادلة من المعادلات التالية :

$x^2=64$ ؛ $x^2=289$ ؛ $x^2=361$ ؛ $x^2=-9$

30 • حل كل معادلة من المعادلات التالية :

$x^2=-4$ ؛ $x^2=100$ ؛ $x^2=0$

$x^2=1$ ؛ $x^2=0,01$ ؛ $x^2=\frac{9}{25}$

مسائل

31 يرمز لمعاكس العدد a بالرمز $-a$

• كيف يرمز للأعداد التالية :

• معاكس مربع a. • ضعف مربع a.

• مربع معاكس a. • مربع ضعف a.

32 • نعتبر العددين A و B حيث :

$A=3-2\sqrt{2}$ و $B=-1+\sqrt{2}$

1 • احسب كلا من الأعداد التالية :

$A+B$ ؛ $A-B$ ؛ $A\times B$

• اكتب النتائج على الشكل $a+b\sqrt{2}$

حيث a و b عددان صحيحان.

2 • احسب العدد $\frac{A}{B}$.

• اكتب النتيجة على الشكل $x+y\sqrt{2}$.

33 • برهن أن : $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1}=2-\sqrt{2}$

34 • اكتب العددين B و A على الشكل $a\sqrt{2}$

حيث a عدد صحيح.

$A=(3\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)+2\sqrt{2}-5$

و $B=5\sqrt{27}+\sqrt{75}$ (بين كل مراحل الحساب)

35 C و D عددان حيث :

$C=\sqrt{18}\times\sqrt{6}$ ؛ $D=5\sqrt{12}+6\sqrt{3}-\sqrt{300}$

• أكتب C و D على الشكل $a\sqrt{3}$ حيث a عدد صحيح.

36 N عدد معرف كما يلي : $N=\sqrt{20}-\sqrt{45}-7\sqrt{5}$

• اكتب العدد N على الشكل $a\sqrt{b}$

حيث a عدد صحيح و b عدد طبيعي أصغر ما يمكن.

37 A و B عددان حيث :

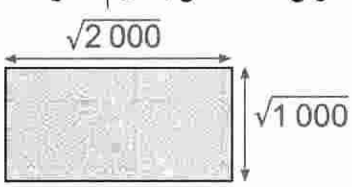
$A=3\sqrt{2}-4$ ؛ $B=3\sqrt{2}+4$

• احسب القيم المضبوطة للأعداد التالية :

$A+B$ ؛ $A-B$ ؛ A^2 ؛ $A\times B$

38 إليك مستطيلاً علم طوله وعرضه.

في هذا التمرين، لا نعمل بالقيم المقربة.



1 • هل طول هذا المستطيل هو ضعف عرضه ؟ لماذا ؟

2 • اكتب $\sqrt{2\,000}$ على الشكل $a\sqrt{5}$

ثم $\sqrt{1\,000}$ على الشكل $b\sqrt{10}$

حيث a و b عددان طبيعيان.

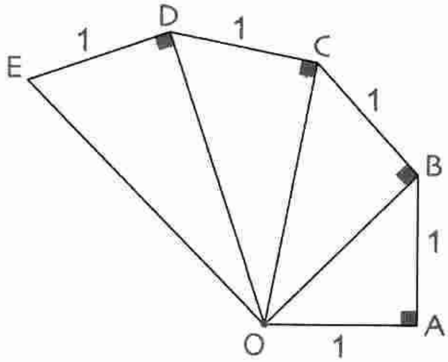
3 • اكتب مساحة المستطيل على الشكل $c\sqrt{2}$

حيث c عدد طبيعي.

4 • بين أن محيط المستطيل يكتب على الشكل

$20\sqrt{5}\,(2+\sqrt{2})$.

39 لاحظ الشكل.



1 . احسب الأطوال OB ؛ OC ؛ OD ؛ OE

2 . انشئ القطعة ذات الطول $\sqrt{7}$.

40 المربع السحري هو مربع، تكون المجاميع في كل سطر، كل عمود و كل قطر متساوية.

• أكمل المربعين التاليين للحصول على مربعين سحريين.

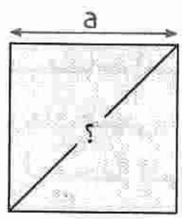
• (أعط القيم المضبوطة على الشكل $\sqrt{N}$).

$\sqrt{8}$	$\sqrt{98}$	
	$\sqrt{50}$	
	$\sqrt{18}$	

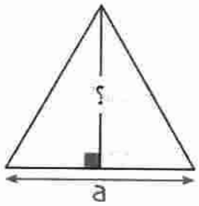
$\sqrt{3}$			$\sqrt{147}$
$\sqrt{48}$		$\sqrt{243}$	$\sqrt{108}$
	$\sqrt{12}$		$\sqrt{363}$
		$\sqrt{27}$	$\sqrt{300}$

41 نعتبر المربع الذي ضلعه a.

• عبّر عن القيمة المضبوطة لقطر هذا المربع بدلالة a.



42 نعتبر المثلث المتقايس الأضلاع.

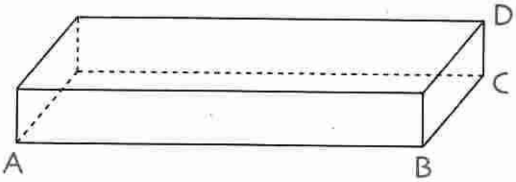


1 . عبّر عن ارتفاعات المثلث المتقايس الأضلاع بدلالة a.

2 . ماذا تستنتج ؟

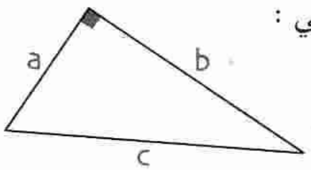
43 إليك متوازي المستطيلات التالي :

$AB = 8$ ؛ $BC = 4$ ؛ $CD = 1$



• احسب AC و AD. (أعط القيم المضبوطة).

44 نعتبر المثلث القائم التالي :



حيث أضلاعه هي

A ، B ، C و C هو وتره.

• يعطى ضلعان من هذا المثلث.

احسب في الحالتين التاليتين الضلع الثالث.

1

a	b	c
$2\sqrt{2}$	$\sqrt{10}$	؟

2

a	b	c
$3\sqrt{5}$	؟	$5\sqrt{2}$

45 ABC مثلث.

نضع $BC = x$ ؛ $CA = y$ ؛ $AB = z$.

1

x	y	z
4	6	$2\sqrt{13}$

2

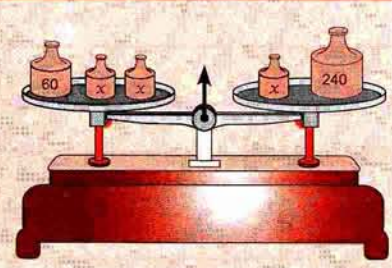
x	y	z
$\sqrt{5}$	$2\sqrt{3}$	$\sqrt{7}$

• هل المثلث قائم ؟ إذا كانت الإجابة نعم، حدد رأس الزاوية القائمة.

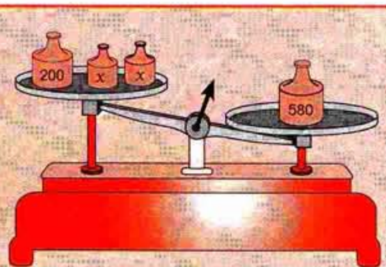
4

المعادلات و المتراجحات من الدرجة الأولى بمجهول واحد

1 - المعادلات من الدرجة الأولى بمجهول واحد
2 - المعادلات من الشكل $(ax + b)(cx + d) = 0$
3 - الترتيب و العمليات
4 - المتراجحات من الدرجة الأولى بمجهول واحد



الميزان في وضعية توازن.
الكتلة الكلية في الكفة عن اليمين تساوي الكتلة الكلية في الكفة عن اليسار.



الميزان في وضعية "لا توازن".
يوجد في الكفة العليا أصغر كتلة.

الكفاءات المستهدفة

(التي يجب اكتسابها)

- حل معادلات يؤول حلها إلى حل "معادلة جداء".
- حل متراجحة من الدرجة الأولى بمجهول واحد و تمثيل مجموعة حلولها على مستقيم مدرج.
- حل مشكلات بتوظيف معادلات أو متراجحات من الدرجة الأولى بمجهول واحد.

استبيان متعدد الإجابات

إختر الإجابة الصحيحة.

السؤال	الإجابة 1	الإجابة 2	الإجابة 3
1 . من أجل $x = 0$ ، العبارة $4 - 4x^2$ تساوي	0	-4	4
2 . من أجل $x = \frac{1}{3}$ ، العبارة $1 - 3x$ تساوي	-1	3	0
3 . إذا كان $x > 2$ فإن …	$x - 2 > 2$	$x - 2 > 0$	$x = 2$
4 . إذا كان $x < -1$ فإن …	$2x < -1$	$2x < -2$	$2x = -1$
5 . إذا كان $x > -2$ فإن …	$-3x > 6$	$-3x < 6$	$-3x > -6$
6 . إذا كان $x < 1$ فإن …	$2x - 2 < 0$	$2x - 2 > 0$	$2x - 2 = 0$
7 . إذا كان $x < 3$ فإن …	$\frac{x}{3} < 3$	$\frac{x}{3} < 1$	$\frac{x}{3} = 9$
8 . إذا كان $x > -\frac{1}{2}$ فإن …	$\frac{x}{-4} > -2$	$\frac{x}{-4} < \frac{1}{8}$	$\frac{x}{-4} > \frac{1}{8}$
9 . العدد الصحيح x الذي يحقق المساواة $3x = 6$ هو …	3	2	0
10 . العدد الصحيح x يحقق المساواة $4x + 4 = 0$ هو …	-4	4	-1
11 . الأعداد x التي تحقق المتباينة $2x > 6$ هي الأعداد x بحيث …	$x > 3$	$x < 3$	$x = 3$
12 . الأعداد x التي تحقق المتباينة $-5x < 0$ هي الأعداد x بحيث …	$x > 0$	$x = 0$	$x < 0$

أنشطة تحضيرية

النشاط 1

نعتبر العبارتين A و B التاليتين : $A = 3x - 5$ ؛ $B = -2x + 4$

1 • أكمل الجدولين التاليين.

x	-2	$-\frac{3}{5}$	0	$\frac{5}{3}$	1	2
A	....	....	....	....	....	....

x	-2	$-\frac{3}{5}$	0	$\frac{3}{5}$	1	2
B	....	....	....	....	....	....

2 • حدد قيمة x التي تحقق المساواة $A = 0$.

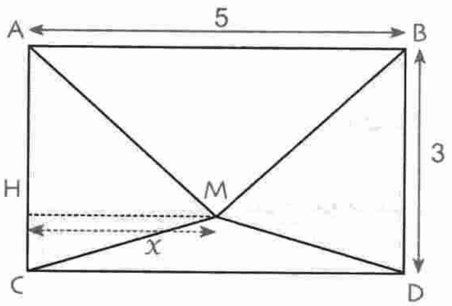
3 • حدد قيمة x التي تحقق المساواة $B = 0$.

النشاط 2 - المعادلات من الدرجة الأولى بمجهول واحد

ABCD مستطيل حيث $AB = 5\,cm$ و $BC = 3\,cm$. (الشكل)

H نقطة من الضلع [AC] و M تقع داخل المستطيل ABCD

حيث $MH = x$.



نريد الحصول على قيمة x بحيث تكون مساحة المثلث AMC تساوي مساحة المثلث BMD.

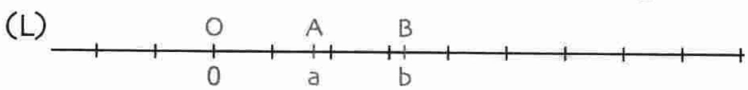
1 • أكتب مساواة تعبّر عن الشروط الموضوعة.

2 • أوجد قيمة x التي تحق هذه المساواة.

النشاط 3 - المتراجحات من الدرجة الأولى بمجهول واحد

1 • أ) (L) مستقيم مدرج مبدأه النقطة O.

A و B نقطتان من (L) فاصلتاهما a و b على الترتيب حيث $a < b$.



• أعد رسم الشكل.

ب) باستعمال مدور (أو مسطرة مدرجة)، ضع على نفس الشكل النقطتين C و D فاصلتاهما 3a و 3b على الترتيب، ثم ضع النقطتين E و F فاصلتاهما $-2a$ و $-2b$ على الترتيب.

ج) أكمل الجمل التالية بوضع الرمز المناسب > ، < مكان النقط. $3a \;....\; 3b$ ؛ $-2a \;....\; -2b$

2 • في كل من الحالتين التاليتين، ارسم مستقيما مدرجا ثم أجب على السؤالين 1 • ب) و 1 • ج) بعد وضع النقطتين ذات الفاصلتين a و b على المستقيم بحيث :

أ) a سالب و b موجب .

ب) a و b سالبان و $a < b$.

3 • a ، b ، c هي أعداد صحيحة نسبية. أكمل الكتابات التالية :

إذا كان $a < b$ و $c > 0$ فإن $ac \;....\; bc$.

إذا كان $a < b$ و $c < 0$ فإن $ac \;....\; bc$.

النشاط 4 - حل متراجحة من الدرجة الأولى بمجهول واحد

يقول رضا لصديقه سمير : « أوجد عددا بحيث إذا طرحت 1 من ضعفه يكون أكبر من مجموع ثلاثة أمثال هذا العدد و العدد 2 ».

إجابة سمير : « هذا العدد هو 5 - ».

1 • هل أصاب سمير ؟ برّر إجابتك.

2 • نريد البحث عن كل الأعداد x التي تحقق هذا الشرط.

أ) اكتب متباينة تشمل المجهول x للتعبير عن هذا الشرط.

ب) برهن أن هذه المتباينة تكتب أيضا $x < -3$.

جـ) ما هي الأعداد x التي تحقق المتباينة السابقة ؟

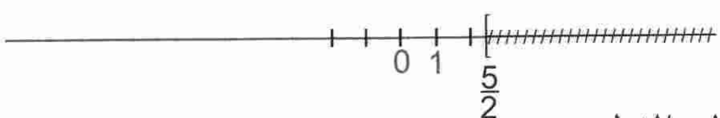
3 • أ) ارسم مستقيما مدرجا و لوّن مجموعة النقط التي فواصلها تحقق هذه المتباينة.

ب) اذكر إن كانت الأعداد التالية : 7,5 - ؛ 5 - ؛ 3 - ؛ 0 ؛ 2,5 تحقق هذه المتباينة.

4 • لوّن على مستقيم مدرج مجموعة الأعداد x حيث $x > -2$.

لوّن على مستقيم مدرج آخر مجموعة الأعداد x حيث $x < 3$.

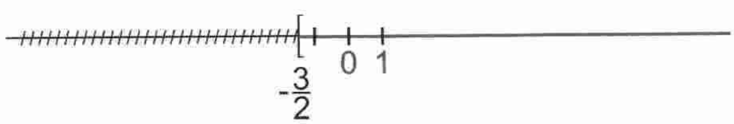
5 • لاحظ المستقيم المدرج التالي:



النقطة ذات الفاصلة $\frac{5}{2}$ تنتمي إلى الجزء المشطوب.

عين مجموعة الأعداد الممثلة على المستقيم المدرج بالجزء الغير المشطوب.

لاحظ المستقيم المدرج التالي :



النقطة ذات الفاصلة $-\frac{3}{2}$ لاتنتمي إلى الجزء الغير المشطوب.

عين مجموعة الأعداد الممثلة على المستقيم المدرج بالجزء الغير المشطوب.

معارف

1 - المعادلات من الدرجة الأولى بمجهول واحد

تعريف
a، b، x أعداد حيث $a \neq b$.
• نسمي معادلة من الدرجة الأولى بمجهول واحد x، كل معادلة يمكن كتابتها على الشكل $ax = b$.

أمثلة
• المعادلة $3x = 1$ هي معادلة من الدرجة الأولى ذات المجهول x.
• المعادلة $-8x + 5 = 2x - 3$ هي معادلة من الدرجة الأولى ذات المجهول x،
يمكن كتابتها على الشكل $-10x = -8$
• المعادلة $3\sqrt{2}\,x - 4 = 2$ هي معادلة من الدرجة الأولى ذات المجهول x،
يمكن كتابتها على الشكل $3\sqrt{2}\,x = 6$

حل معادلة من الدرجة الأولى بمجهول واحد :

$ax = b$ هي معادلة من الدرجة الأولى ذات المجهول x.

تعريف
حل المعادلة $ax = b$ يعني إيجاد كل قيم المجهول x التي تحقق المساواة $ax = b$.

أمثلة
• العدد 2- هو حل للمعادلة $3x + 6 = 2x + 4$ لأن $3(-2) + 6 = 2(-2) + 4$.
• العدد 0 ليس حلا لها لأن $3 \times 0 + 6 \neq 2 \times 0 + 4$.
• العدد 0 هو حل للمعادلة $2x + 1 = 1 - x$ لأن $2 \times 0 + 1 = 1 - 0$.
• العدد 1- هو ليس حلا لها لأن $2 \times (-1) + 1 \neq 1 - (-1)$.

نظرية
$ax = b$ هي معادلة من الدرجة الأولى ذات المجهول x.
المعادلة $ax = b$ تقبل حلا واحدا هو $\frac{b}{a}$.

أمثلة
1 • المعادلة $3x = 5$ تقبل حلا واحدا و هو $\frac{5}{3}$.
2 • المعادلة $2x - 4 = 5x + 2$ تبسّط على الشكل $3x = -6$ و تقبل حلا وحيدا هو 2- .

ملاحظات
• المعادلة $4x - x + 3 = 3x - 1$ تكتب على الشكل $0x = 4$.
نلاحظ أنه لا يوجد أي عدد x يحقق المساواة $0x = 4$. إذن المعادلة المعطاة لا تقبل حلا.
• المعادلة $\frac{2x - 4}{4} = \frac{1}{2}x - 1$ تكتب على الشكل $0x = 0$.
نلاحظ أن كل عدد x يحقق المساواة $0x = 0$. إذن كل عدد هو حل المعادلة المعطاة.

2 - المعادلات من الشكل $(ax+b)(cx+d)=0$

a، b، c، d، x أعداد.

نعلم أنه : يكون الجداء ab منعدما إذا كان أحد العاملين على الأقل معدوما.

أي : $a.b=0$ إذا كان $a=0$ أو $b=0$.

خاصية

حلول المعادلة $(ax+b)(cx+d)=0$ هي حلول كل من المعادلتين $ax+b=0$ و $cx+d=0$.

مثال

لحل المعادلة $(3x-1)(2x+7)=0$ نحل كلا من المعادلتين $3x-1=0$ و $2x+7=0$

حل المعادلة $3x-1=0$.

لدينا $3x-1=0$ أي $3x=1$. حل هذه المعادلة هو $x=\frac{1}{3}$

لدينا $2x+7=0$ أي $2x=-7$. حل هذه المعادلة هو $-\frac{7}{2}$

إذن للمعادلة $(3x-1)(2x+7)=0$ حلان هما $\frac{1}{3}$ و $-\frac{7}{2}$.

3 - الترتيب و العمليات

أ) الترتيب و الجمع

خاصية 1

a، b، c ثلاث أعداد.

إذا كان $a<b$ فإن $a+c<b+c$ و $a-c<b-c$.

ملاحظة

- الخاصية 1 تعني أن الترتيب لا يتغير إذا أضفنا نفس العدد إلى طرفي المتباينة.

مثال

إذا كان $x-1<3$ فإن $x-1+1<3+1$.

- الخاصية 1 تبقى صحيحة إذا إستبدلنا العلاقة $<$ بإحدى العلاقات $\leq$ ؛ $>$ ؛ $\geq$.

ب) الترتيب و الضرب

خاصية 2

a، b، k ثلاث أعداد.

إذا كان $a<b$ و $k>0$ فإن $ka<kb$ و $\frac{a}{k}<\frac{b}{k}$.

ملاحظة

- الخاصية 2 تعني أن الترتيب لا يتغير إذا ضربنا (أو قسمنا) طرفي متباينة في (على) عدد موجب تماما.

مثال

- x عدد. إذا كان $x<3$ فإن $2x<2\times3$.
- إذا كان $2x>-6$ فإن $x>-3$.

خاصية 3

a، b، k ثلاث أعداد.

إذا كان $a<b$ و $k<0$ فإن $ka>kb$ و $\frac{a}{k}>\frac{b}{k}$.

ملاحظة

- الخاصية 3 تعني أن الترتيب يتغير إذا ضربنا أو (قسمنا) طرفي متباينة في (على) عدد سالب تماما.

مثال

a عدد حيث $a<-1$ إذن $(-3)a>(-3)(-1)$.

ملاحظة

كل من الخاصيتين 2 و 3 تبقى صحيحة إذا استبدلنا العلاقة $<$ بإحدى العلاقات : $\leq$ ؛ $>$ ؛ $\geq$.

4 - المتراجحات من الدرجة الأولى بمجهول واحد

حل متراجحة من الشكل $x + a < b$

إذا كان $x + a < b$ فإن $x < b - a$. حلول المتراجحة $x + a < b$ هي الأعداد x الأصغر من $b - a$.

مثال حلول المتراجحة $x + 5 \leq 2$ هي الأعداد x بحيث $x < -3$. أي كل الأعداد الأصغر من -3 .

حل متراجحة من الشكل $ax < b$ حيث $a > 0$

إذا كان $ax < b$ حيث $a > 0$ فإن $x < \frac{b}{a}$.

حلول المتراجحة $ax < b$ حيث $a > 0$ هي الأعداد x الأصغر من $\frac{b}{a}$.

مثال حلول المتراجحة $3x \leq -1$ هي الأعداد x بحيث $x \leq -\frac{1}{3}$.

أي كل الأعداد الأصغر من $-\frac{1}{3}$ أو تساوي $-\frac{1}{3}$.

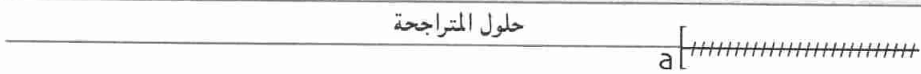
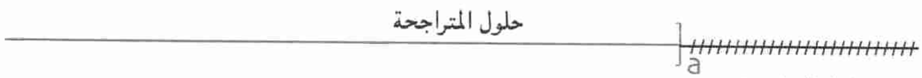
حل متراجحة من الشكل $ax < b$ حيث $a < 0$

إذا كان $ax < b$ حيث $a < 0$ فإن $x > \frac{b}{a}$. حلول المتراجحة $ax < b$ حيث $a < 0$ هي الأعداد x الأكبر من $\frac{b}{a}$.

مثال حلول المتراجحة $-\frac{1}{3}x < 1$ هي الأعداد x بحيث $x > -3$. أي كل الأعداد الأكبر من -3 .

تمثيل بيانيا حلول متراجحة

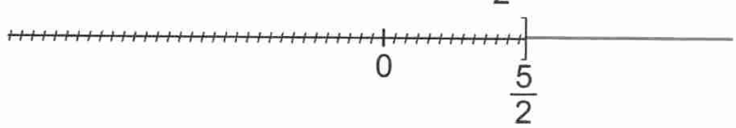
نمثل بيانيا حلول متراجحة على مستقيم مدرج. نلخص التمثيلات البيانية للحلول في الجدول التالي.

المتراجحة	التمثيل البياني للحلول
$x < a$	
$x \leq a$	
$x > a$	
$x \geq a$	

ملاحظة حلول كل متراجحة ممثلة بجزء المستقيم المدرج الملون بالأحمر.

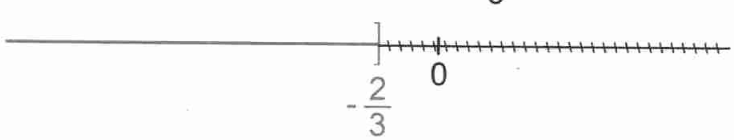
أمثلة 1 • حلول المتراجحة $2x > 5$ هي الأعداد x بحيث $x > \frac{5}{2}$.

تمثيلها البياني يكون كالآتي :



2 • حلول المتراجحة $-3x \geq 2$ هي الأعداد x حيث $x \leq -\frac{2}{3}$.

تمثيلها البياني يكون كالآتي :



طرائق

1 - حل معادلة من الدرجة الأولى بمجهول واحد

طريقة لحل معادلة من الدرجة الأولى بمجهول واحد نحولها إلى معادلة من الشكل $ax = b$.

ملاحظة
- عندما ننقل عددا أو عبارة من طرف إلى الطرف الآخر لمعادلة لا ننسى تغيير الإشارات.
- عندما نقسم طرف معادلة على عدد، نتأكد أن هذا العدد غير منعدم.

تمرين 1 حل كل من المعادلتين التالتين : $4x - 3 = 2x + 1$ ؛ $2(x + 2) = 3x - 5$

حل
- حل المعادلة : $4x - 3 = 2x + 1$ لدينا : $4x - 3 = 2x + 1$ أي $4x - 2x = 3 + 1$
أي $2x = 4$ إذن $\frac{2x}{2} = \frac{4}{2}$ أي $x = 2$
إذن : 2 هو الحل الوحيد للمعادلة $4x - 3 = 2x + 1$

- حل المعادلة : $2(x + 2) = 3x - 5$
لدينا : $2(x + 2) = 3x - 5$ أي $2x + 4 = 3x - 5$ أي $2x - 3x = -5 - 4$
أي $-x = -9$ إذن $x = 9$
إذن : 9 هو الحل الوحيد للمعادلة $2(x + 2) = 3x - 5$.

تمرين 2 حل المعادلة : $2(x - 1)^2 = (x + 3)(x - 1)$.

حل نحل المعادلة التالية : $2(x - 1)^2 = (x + 3)(x - 1)$ نتبع المراحل التالية :
ننقل كل الأعداد و العبارات إلي الطرف الأول للمعادلة أي $2(x - 1)^2 - (x + 3)(x - 1) = 0$
نلاحظ أن $(x - 1)$ عامل مشترك. إذن المعادلة تكتب $(x - 1)\left[2(x - 1) - (x + 3)\right] = 0$
أي $(x - 1)(2x - 2 - x - 3) = 0$ أي $(x - 1)(x - 5) = 0$
نحل المعادلة $x - 1 = 0$. نجد $x = 1$.
نحل المعادلة $x - 5 = 0$. نجد $x = 5$.
نستنتج أن للمعادلة $2(x - 1)^2 = (x + 3)(x - 1)$ حلان هما 1 و 5.

2 - حل متراجحة من الدرجة الأولى بمجهول واحد

طريقة لحل متراجحة من الدرجة الأولى بمجهول واحد نحولها إلى متراجحة من الشكل :
$ax < b$ (أو $ax \leq b$ أو $ax > b$ أو $ax \geq b$)

تمرين حل المتراجحة التالية : $5(2x - 1) < 4x - 2$

حل لدينا : $5(2x - 1) < 4x - 2$ أي $10x - 5 < 4x - 2$
أي $10x - 4x < -2 + 5$ أي $6x < 3$ إذن $\frac{6x}{6} < \frac{3}{6}$ أي $x < \frac{1}{2}$.
ينتج أن : حلول المتراجحة هي الأعداد x بحيث $x < \frac{1}{2}$ أي كل عدد أصغر من $\frac{1}{2}$ هو حل.

تمارين محلولة

تمرين 1 وضع مشكل في شكل معادلة ثم حله

تبلغ ليلى سن 4 سنوات و عمر أبيها 36 سنة.

بعد كم سنة يكون عمر الأب ضعف عمر البنت ؟

حل ليكن x عدد السنوات الضرورية ليصبح سن الأب ضعف سن ليلى. ← إختيار المجهول

باستعمال معطيات المشكل نكتب :

	ليلى	أبيها
السن الحالي	4	36
السن بعد x سنة	$4 + x$	$36 + x$

وضع المشكل على شكل معادلة

المشكل المطروح يتمثل في حل المعادلة $36 + x = 2(4 + x)$

حل المعادلة : $36 + x = 2(4 + x)$ ← حل المعادلة

لدينا : $36 + x = 2(4 + x)$ أي $36 + x = 8 + 2x$

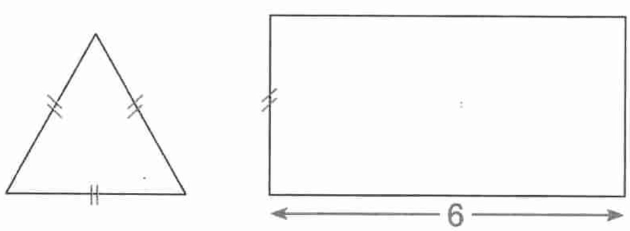
أي $x - 2x = 8 - 36$

أي $-x = -28$ أي $x = 28$

التحقق لدينا : $36 + 28 = 64$ و $2(4 + 28) = 2 \times 32 = 64$

إذن : يصبح عمر الأب ضعف عمر البنت بعد 28 سنة. ← تفسير النتيجة (أي الإجابة)

تمرين 2 وضع مشكل في شكل متراجحة ثم حله



- لاحظ الشكلين.

ضلع المثلث هو عرض المستطيل.

- عيّن أصغر قيمة لطول ضلع المثلث التي يكون من أجلها محيط المثلث أكبر من أو يساوي محيط المستطيل.

حل ليكن x هو طول ضلع المثلث .

لدينا: محيط المثلث هو $3x$ و محيط المستطيل هو $2(6 + x)$.

محيط المثلث أكبر من محيط المستطيل يعني $3x \geq 2(6 + x)$.

أي $3x \geq 12 + 2x$ و بالتالي $x \geq 12$.

إذن : أصغر قيمة لطول ضلع المثلث التي تحقق محيط المثلث أكبر من أو يساوي محيط المستطيل هي 12.

تمارين و مسائل

صحيح أو خاطئ

1 • 1. العدد $\frac{1}{3}$ هو حل للمعادلة $3x = 1$.

2 • العدد $\frac{1}{3}$ هو حل للمعادلة $3x - 1 = 0$.

3 • العدد $\frac{1}{3}$ هو حل للمعادلة $-3x + 1 = 0$.

4 • من أجل $x = -1$ ، العدد $4x - 4$ موجب.

5 • من أجل $x = 0$ ، العد د $-x - 2$ سالب.

6 • حلول المتراجحة $-x > 0$ هي الأعداد السالبة.

7 • حلول المتراجحة $-x < 0$ هي الأعداد الموجبة.

8 • حلول المتراجحة $x - 2 \leq 0$ هي الأعداد x بحيث $x \geq 2$.

9 • حلول المتراجحة $2x - 4 > 0$ هي الأعداد x بحيث $x = 2$.

10 • المعادلة $(3x + 2)(x + 2) = 0$ تقبل حلا واحدا هو $x = -2$.

11 • حل المعادلة $(x - 1)(1 - x) = 0$ هو العدد 1.

تمارين

المعادلات من الدرجة الأولى بمجهول واحد

2 • هل العدد 1 حل للمعادلة $3x - 2 = x$ ؟

3 • هل العدد $\frac{2}{3}$ حل للمعادلة $x - 2 = \frac{4}{3}$ ؟

4 • هل العدد $\frac{1}{4}$ حل للمعادلة $1 - x = \frac{3}{2} - 3x$ ؟

5 • حل كل معادلة من المعادلات التالية.

$x + 4 = -5$ ؛ $x - 4 = -4$ ؛ $x + \frac{1}{2} = 1$

$x + 2 = \frac{3}{2}$ ؛ $x - \frac{1}{3} = 2$ ؛ $x + 1{,}3 = 0{,}5$

$3{,}1 = x - 2{,}7$ ؛ $-4{,}7 = -6{,}8 + x$

6 • اكتب ثلاثة معادلات من الشكل $x + a = b$ تقبل العدد 4 حلا لها.

7 • حل كل معادلة من المعادلات التالية.

$2x = 3$ ؛ $-4x = -5$ ؛ $-2 = -4x$

$3 = -7x$ ؛ $\frac{1}{2}x = 5$ ؛ $3 = \frac{2}{5}x$

$\frac{3}{2}x = \frac{4}{3}$ ؛ $-\frac{8}{15} = -\frac{2}{3}x$

8 • اكتب ثلاثة معادلات من الشكل $ax = b$ تقبل العدد -1 حلا لها.

9 • حل كل معادلة من المعادلات التالية.

$2x + 3 = 5x - 1$ ؛ $3x - 6 = 8x + 2$

$2 - 4x = x - 9$ ؛ $1 + 5x = 10 - 13x$

$\frac{2}{9}x + 1 = 5 + \frac{1}{3}x$ ؛ $-\frac{1}{2} + 3x = \frac{5}{3}x + 3$

$1 + \frac{3}{4}x = \frac{3}{8}x - \frac{1}{5}$ ؛ $1 - \frac{1}{3}x = \frac{7}{3} - \frac{5}{6}x$

10 • اكتب ثلاثة معادلات من الشكل $ax + b = cx + d$ تقبل العدد 1 حلا لها.

المعادلات من الشكل $(ax + b)(cx + d) = 0$

11 • حل كل معادلة من المعادلات التالية.

$4(x - 3) = 0$ ؛ $-5(x + 2) = 0$

$2x(3x + 1) = 0$ ؛ $(1 + x)(1 - x) = 0$

$(8x - 2)(2x + 8) = 0$ ؛ $(2x - 1)(x - 2) = 0$

12 1 • حلل إلى جداء عاملين العبارة $x^2 - 5x$.

2 • حل المعادلة $x^2 - 5x = 0$

13 • 1 حلل إلى جداء عاملين العبارة
$.(x+2)^2+(x+2)(2x-1)$

2 • حل المعادلة $(x+2)^2+(x+2)(2x-1)=0$

14 • 1 حلل إلى جداء عاملين العبارة التالية $.x^2-16$

2 • حل المعادلة $x^2-16=0$

15 • 1 حلل إلى جداء عاملين العبارة
$.(x-3)(2+x)+(x-3)^2$

2 • حل المعادلة $(x-3)(2-x)+(x-3)^2=0$

16 • 1 حلل إلى جداء عاملين العبارة $.(4x-2)^2-4x^2$

2 • حل المعادلة $(4x-2)^2-4x^2=0$

17 • 1 حلل إلى جداء عاملين العبارة $.(5-2x)^2-36$

2 • حل المعادلة $(5-2x)^2-36=0$

18 • 1 حلل إلى جداء عاملين العبارة
$.(4x-1)^2-(2x+3)^2$

2 • حل المعادلة $(4x-1)^2-(2x+3)^2=0$

المتراجحات من الدرجة الأولى بمجهول واحد

19 نعتبر المتراجحة $3x-2 \leq 2x-3$
من بين الأعداد التالية، حدد الأعداد التي هي حلول لهذه المتراجحة : -3 ؛ -1 ؛ 0 ؛ 1 ؛ 2.

20 نعتبر المتراجحة $2+\frac{2}{3}x > 2-\frac{1}{2}x$
من بين الأعداد التالية، حدد الأعداد التي هي حلول لهذه المتراجحة : -1 ؛ 0 ؛ 2 ؛ 4 ؛ 5.

21 • حل كلا من المتراجحات التالية :

$x-3<1$ ؛ $x+3 \geq -1$ ؛ $-6 \leq x+7$

$-9>-8+x$ ؛ $x+\frac{1}{2}>2$ ؛ $-\frac{2}{3}+x \leq \frac{1}{6}$

$\frac{5}{12}>x-\frac{5}{4}$ ؛ $-\frac{7}{10} \geq \frac{6}{5}+x$

22 • اكتب متراجحتين من الشكل $x+a<b$
حلولها هي الأعداد الأصغر من أو تساوي 3.

23 • حل كلا من المتراجحات التالية :

$3x<12$ ؛ $-4x>8$ ؛ $25 \leq -5x$

$-36 \geq 12x$ ؛ $\frac{1}{3}x>3$ ؛ $-2 \leq \frac{2}{5}x$

$-\frac{2}{3}x>\frac{2}{3}$ ؛ $-\frac{4}{5} \leq \frac{1}{3}x$

24 • أكتب متراجحتين من الشكل $ax<b$
حلولها هي الأعداد الأكبر من أو تساوي 2 -.

25 • حل كلا من المتراجحات التالية :

$3x+2<x-2$ ؛ $4x-3 \leq 4+2x$

$3-3x>-9+3x$ ؛ $3+4x \geq 13-16x$

$\frac{2}{9}x+2>\frac{1}{3}x+6$ ؛ $2x-\frac{1}{2} \geq 1+\frac{5}{3}x$

$2+\frac{3}{4}x \leq \frac{3}{8}x-\frac{1}{5}$ ؛ $5-\frac{1}{3}x<\frac{7}{3}+\frac{5}{6}x$

26 • مثل على مستقيم مدرج حلول كل متراجحة من المتراجحات التالية :

$x<3$ ؛ $x \geq 2$ ؛ $x>1$ ؛ $x \leq 4$

$x>0$ ؛ $x \leq 0$ ؛ $-2 \geq x$ ؛ $-2 \leq x$

27 • حل المتراجحتين التاليتين و مثّل على مستقيم مدرج حلول كل منها.

$$3(2x-6)+4(2x-3)<2x-5(2x-3)$$

$$6(1-2x)-4(-2x-5)<3(x-7)-2(8-9x)$$

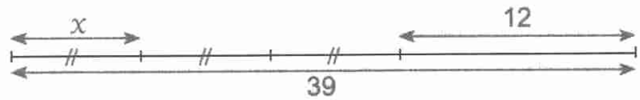
28 • حل المتراجحتين التاليتين و مثّل على مستقيم مدرج حلول كل منها.

$$\frac{5x-1}{2}+4<1+\frac{2x+5}{2}$$

$$\frac{x+5}{3}-x<\frac{x+1}{6}+\frac{1}{3}$$

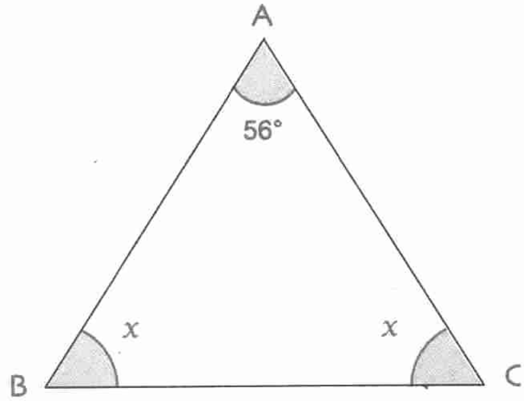
مسائل

29 1 • اكتب معادلة تسمح بحل المشكل الممثل كما يلي.



2 • حل المعادلة المحصل عليها . فسّر النتيجة.

30 1 • اكتب معادلة تعبر عن المشكل التالي :



2 • حل المعادلة المحصل عليها .فسر النتيجة.

31 • عيّن ثلاثة أعداد طبيعية متتابعة مجموعها 573.

32 تسير سيارة بسرعة ثابتة قدرها 120 km/h في طريق سريع.

• في أي مدة تقطع هذه السيارة مسافة 180 km ؟

33 تصرف عائلة خمسين في المئة من مداخيلها الشهرية للكراء و ثلث هذه المداخيل لتكاليف التغذية.

يبقى لها 2000 دينارا.

• احسب المداخيل الشهرية لهذه العائلة.

34 نضرب عددا في 5 و نطرح من النتيجة 64 و أخيرا نقسم على 3. فنجد العدد الذي انطلقنا منه.

• ما هو هذا العدد ؟

35 محيط حقل مستطيل هو 82 m.

الطول يتجاوز العرض بـ 9 m.

• احسب طول و عرض هذا الحقل ؟

36 • ما هو العدد الذي نضيفه إلى بسط و مقام الكسر $\frac{3}{7}$ للحصول على كسر يساوي $\frac{9}{10}$ ؟

37 • محيط مستطيل أكبر من 25 cm و عرضه يساوي 2,5 cm.

1 • اكتب متراجحة تعبر عن طول هذا المستطيل.

2 • حل المتراجحة المحصل عليها .

3 • ماذا يمكن قوله عن طول المستطيل ؟

38 مجموع ثلاثة أعداد طبيعية متتابعة أصغر من 744.

• ماذا يمكن استنتاجه بالنسبة إلى العدد الأصغر من بين هذه الأعداد ؟

39 قطار يقطع مسافة 750 km/h بسرعة عظمى مقدرة بـ 125 km/h.

إذا كان t هي المدة، بالساعات التي يقطع بها هذه المسافة

• بين أن $750 \leq 125t$.

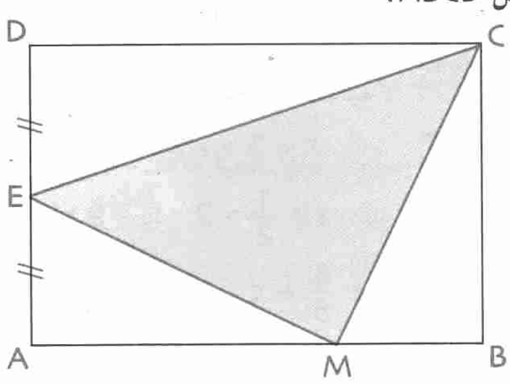
• حل هذه المتراجحة.

• استنتج المدة الأدنى لقطع المسافة.

40 ABCD مستطيل حيث AB = 6 cm و BC = 4 cm

النقطة E هي منتصف الضلع [AD].

• أين يجب وضع النقطة M على الضلع [AB] حتى تكون مساحة المثلث CEM أصغر من أو تساوي ثلث مساحة المستطيل ABCD؟



5 جمل معادلتين من الدرجة الأولى بمجهولين

1 - المعادلة من الدرجة الأولى بمجهولين
2 - جملة معادلتين من الدرجة الأولى بمجهولين
3 - حل جملة معادلتين من الدرجة الأولى بمجهولين

Karl Friedrich Gauss

كارل فريدرش ڤوص هو رياضياتي ألماني.
عاش في الفترة 1777 - 1855 و يعتبر من أكبر علماء القرن التاسع عشر.
إهتم في أبحاثه في الفيزياء بالكهرباء و المغناطيس و الضوء وفي كل ميادين الرياضيات ساهم بأعماله في حل العديد من المشاكل في الحساب - التحليل - الجبر - الهندسة - الإحصاء - الإحتمالات.

الكفاءات المستهدفة

(التي يجب اكتسابها)

- حل جملة معادلتين من الدرجة الأولى بمجهولين جبريا.
- تفسير حل جملة معادلتين من الدرجة الأولى بمجهولين بيانيا.
- حل مشكلات بتوظيف جملة معادلتين من الدرجة الأولى بمجهولين.

استبيان متعدد الإجابات

اختر الإجابة الصحيحة.

الإجابة 3	الإجابة 2	الإجابة 1	السؤال
0	2	- 2	1 • من أجل $x = 1$ و $y = -1$ العبارة $x + y$ تساوي …
3	9	6	2 • من أجل $x = 1$ و $y = 3x + 3$ العدد y يساوي …
4	- 1	- 4	3 • من أجل $x = 0$ و $3x + y + 1 = 0$ العدد y يساوي …
- 2	4	0	4 • من أجل $y = 0$ و $2x - y + 4 = 0$ العدد x يساوي …
- 1	1	0	5 • من أجل $x = 0$ و $y = -1$ العدد $3x + y + 1$ يساوي ….
$\frac{1}{2}x$	x^2	$2x$	6 • x عدد موجب. ضعف x هو …
$4x + y^2$	$x^2 + \sqrt{y}$	$4x + \sqrt{y}$	7 • x و y عددان موجبان. مجموع مربع x و الجذر التربيعي للعدد y هو …
$-\frac{3}{4}$	$\frac{3}{4}$	- 3	8 • حل المعادلة $4x = -3$ هو …
0	$\frac{1}{5}$	2	9 • حل المعادلة $5x + 2 = 2$ هو …
- 1	2	- 2	10 • حل المعادلة $-2(y + 1) + y = 0$ هو …

أنشطة تحضيرية

النشاط 1

اشترى ولدان أقمصة و قبعات لممارسة الرياضة.

اشترى الأول 4 قبعات و 3 أقمصة بثمن 770 دينارا و الثاني قبعتين و 7 أقمصة بثمن 1210 دينارا.

نريد البحث عن ثمن القبعة الواحدة و ثمن القميص الواحد.

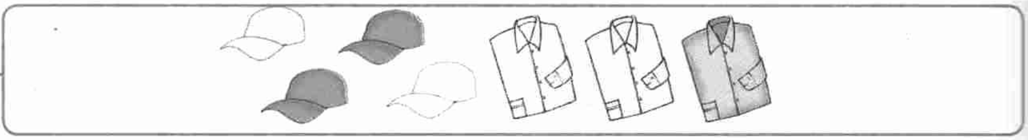
1 • أ) اختر المجهولين في هذا المشكل ثم أكتب معادلتين للتعبير عن المعطيات.

ب) • هل يمكن إيجاد «ذهنيا» الثمنين المطلوبين ؟

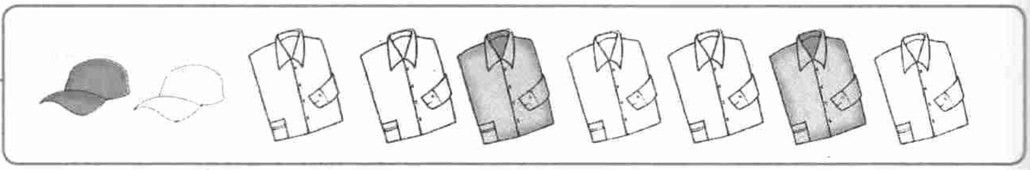
• هل يمكن التحقق من صحة النتائج الموجودة ؟

2 • أ) عبّر بواسطة معادلات، عن المعطيات الواردة في الرسومات التالية :

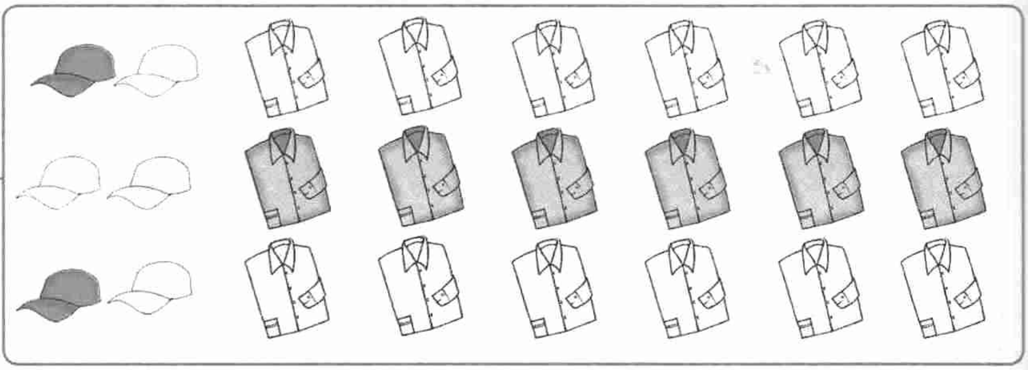
770 دينارا



1210 دينارا



3180 دينارا

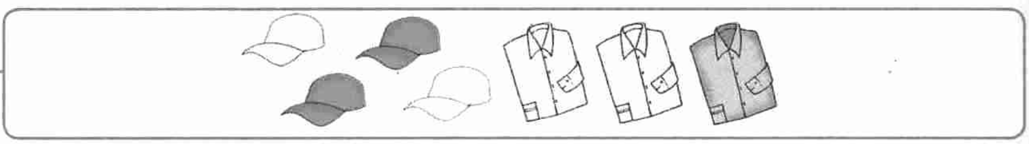


ب) • اكتب معادلات أخرى إنطلاقا من معطيات المشكل.

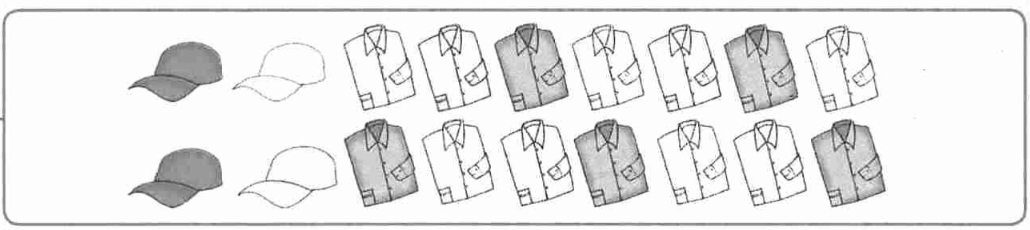
• اذكر كيف يمكن إيجادها.

3 • أ) لاحظ الشكلين التاليين :

770 دينارا



2420 دينارا



بالإعتماد على هذين الشكلين، هل يمكن إيجاد ثمن 11 قميصا ؟

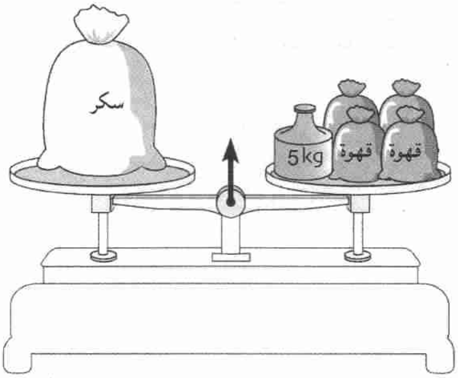
ب) • عين ثمن القميص الواحد و ثمن القبعة الواحدة.

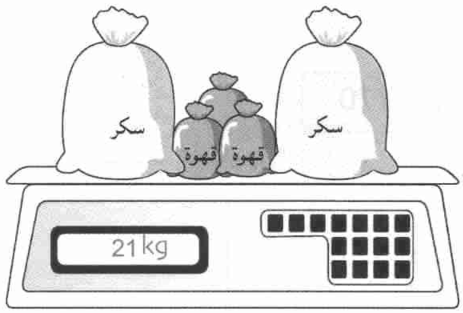
جـ) • كيف يمكن التحقق من صحة النتائج ؟

النشاط 2

يوجد في دكان مواد غذائية، أكياس متماثلة بعضها تحتوي على السكر و الأخرى على القهوة. كل الأكياس التي تحتوي على السكر لها نفس الكتلة و كل الأكياس التي تحتوي على القهوة لها نفس الكتلة أيضا.

نريد تعيين كتلة كيس السكر و كتلة كيس القهوة.





1 • اختر مجاهيل للمشكل ثم أكتب معادلتين لترجمة معطيات هذا المشكل.

2 • أ) بماذا يمكن تعويض كل كيس من السكر الموجود على الميزان الإلكتروني ؟ عبر عن ذلك بمعادلة.

ب) حل المعادلة السابقة لإيجاد كتلة كيس من القهوة.

جـ) احسب عندئذ كتلة كيس من السكر.

د) تحقق من صحة النتائج.

النشاط 3

$3x + y - 5$ و $-x + 4y + 1$ هما عبارتان بدلالة االعددين x و y .

أكمل الجدول التالي بحساب قيمة كل من العبارتين من أجل قيم x و y في كل حالة.

x	y	$3x + y - 5$	$-x + 4y + 1$
-1	2		
0	0		
$\frac{1}{3}$	4		
-3	-1		
$\frac{21}{13}$	$\frac{2}{13}$		

معارف

1 - المعادلة من الدرجة الأولى بمجهولين - حل معادلة بمجهولين

أ) المعادلة من الدرجة الأولى بمجهولين

أمثلة
- المعادلة $3x - 2y - 1 = 0$ هي معادلة من الدرجة الأولى بمجهولين x و y.
- المعادلة $- 4x + y = 0$ هي معادلة من الدرجة الأولى بمجهولين x و y.

ملاحظة يمكن كتابة المعادلة $3x - 2y - 1 = 0$ كما يلي : $y = \frac{3}{2}x - \frac{1}{2}$
و المعادلة $- 4x + y = 0$ كما يلي : $y = 4x$

ب) حل معادلة بمجهولين

أمثلة
1 • $x - 2y - 3 = 0$ هي معادلة بمجهولين x و y.
- عندما نعوض x بالعدد 1 و y بالعدد 1- نحصل على : $1 - 2(-1) - 3 = 0$

أي نحصل على مساواة صحيحة، كذلك من أجل $x = 3$ و $y = 0$ نحصل على مساواة صحيحة.
- عندما نعوض x بالعدد 0 و y بالعدد 1 نحصل على مساواة غير صحيحة لأن $0 - 2\times1 - 3 \neq 0$

نقول أن كلا من الثنائيتين $(1 ; -1)$ و $(3 ; 0)$ هي حل للمعادلة $x - 2y - 3 = 0$
و أن الثنائية $(0 ; 1)$ ليست حلا للمعادلة $x - 2y - 3 = 0$.

2 - جملة معادلتين من الدرجة الأولى بمجهولين

أ) جملة معادلتين من الدرجة الأولى بمجهولين

مثال كل من المعادلتين $4x - 3y + 1 = 0$ و $-2x + y - 5 = 0$ هي معادلة من الدرجة الأولى بمجهولين.
نقول عن كل ثنائية تحقق المعادلتين معا أنها حل للجلمة : $\begin{cases} 4x - 3y + 1 = 0 \\ - 2x + y - 5 = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} 4x - 3y + 1 = 0 \\ - 2x + y - 5 = 0 \end{cases}$ هي جملة معادلتين من الدرجة الأولى بمجهولين x و y.

الثنائية $(-7 ; -9)$ تحقق كلا من المعادلتين. إذن الثنائية $(-7 ; -9)$ هي حل للجملة.

الثنائية $\left(0 ; \frac{1}{3}\right)$ تحقق المعادلة $4x - 3y + 1 = 0$ و لا تحقق المعادلة $- 2x + y - 5 = 0$

إذن الثنائية $\left(0 ; \frac{1}{3}\right)$ ليست حلا للجملة.

ب) حل جملة معادلتين من الدرجة الأولى بمجهولين

تعريف **حل جملة معادلتين من الدرجة الأولى بمجهولين x و y يعني إيجاد كل الثنائيات $(x\ ;\ y)$ التي تحقق المعادلتين معا.**

مثال حل الجملة $\begin{cases} x - y - 3 = 0 & ① \\ 2x + 3y + 5 = 0 & ② \end{cases}$

يمكن كتابة هذه الجملة على الشكل $\begin{cases} 2x - 2y - 6 = 0 \\ 2x + 3y + 4 = 0 \end{cases}$ أي $\begin{cases} 2x = 2y + 6 \\ 2x = -3y - 4 \end{cases}$

ينتج أن $2y + 6 = -3y - 4$ و هذه معادلة من الدرجة الأولى بمجهول واحد y.

هذه المعادلة تقبل حلا واحد هو $y = -2$. بتعويض y بالعدد -2 في المعادلة ① نحصل على معادلة ذات مجهول واحد x هي : $x - (-2) - 3 = 0$ هذه المعادلة تقبل حلا واحد هو $x = 1$.

إذن الجملة تقبل حلا واحد هو الثنائية $(1\ ;-2)$.

التحقيق نعوض x بالعدد 1 و y بالعدد -2 في كل من المعادلتين و نجد $\begin{cases} 1 - (-2) - 3 = 0 \\ 2\times1 + 3(-2) + 4 = 0 \end{cases}$ كل من المساوتين صحيحة.

جـ) التفسير البياني لحل جمل معادلتين من الدرجة الأولى بمجهولين

مثال الجملة $\begin{cases} x - y - 3 = 0 \\ 2x + 3y + 4 = 0 \end{cases}$ تقبل حلا واحد هو $(1\ ;-2)$ أي $x = 1$ و $y = -2$

يمكن كتابة الجملة على الشكل التالي $\begin{cases} y = x - 3 & ① \\ y = -\frac{2}{3}x - \frac{4}{3} & ② \end{cases}$

المستوي مزود بمعلم، المعادلة ① تمثل بالمستقيم (d_1)

المعادلة ② تمثل بالمستقيم (d_2)،

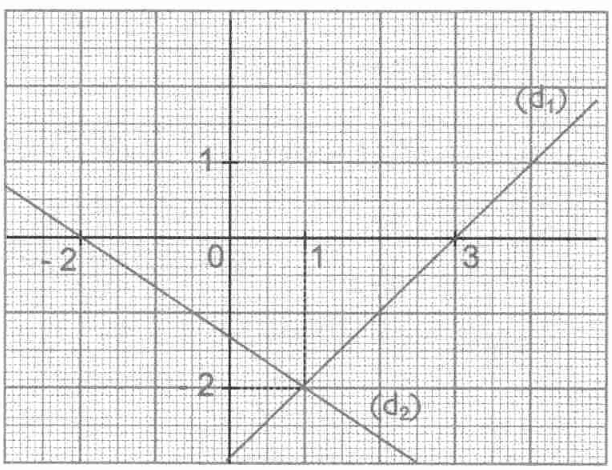
الجملة تمثل بالمستقيمين (d_1) و (d_2).

①

x	y
1	-2
3	0

②

x	y
1	-2
-2	0



يشترك المستقيمان (d_1) و (d_2) في نقطة وحيدة إحداثياها $(1\ ;-2)$. إذن المستقيمان (d_1) و (d_2) متقاطعان. إحداثيا نقطة تقاطعهما هو الحل الوحيد للجملة.

طرائق

حل جملة معادلتين من الدرجة الأولى بمجهولين

طريقة لحل جملة معادلتين من الدرجة الأولى بمجهولين يمكن استعمال طريقة التعويض أو طريقة الجمع.
كل من الطريقتين تعتمد على حل معادلة من الدرجة الأولى بمجهول واحد.

تمرين حل الجملة $\begin{cases} -4x + y = -5 \\ -2x + 3y = 1 \end{cases}$ Ⓐ

حل

أ) الحل بطريقة التعويض

• نرقم المعادلتين $\begin{cases} -4x + y = -5 & ① \\ -2x + 3y = 1 & ② \end{cases}$ • يمكن كتابة الجملة على الشكل $\begin{cases} y = 4x - 5 & ③ \\ -2x + 3y = 1 & ② \end{cases}$

المعادلة ③ تعبر عن المجهول y بدلالة المجهول x.

• نعوض y بالعبارة $(4x - 5)$ في المعادلة ② فنتحصل على معادلة من الدرجة الأولى بمجهول واحد هو x.

$-2x + 3(4x - 5) = 1$ أي $10x = 16$. هذه المعادلة تقبل حلا وحيدا هو $x = \frac{8}{5}$

• نعوض x بالعدد $\frac{8}{5}$ في المعادلة ① فنجد $y = \frac{7}{5}$.

• نستنتج أن الجملة Ⓐ تقبل حلا واحدا هو $\left(\frac{8}{5} ; \frac{7}{5}\right)$.

ب) الحل بطريقة الجمع $\begin{cases} -4x + y = -5 & ① \\ -2x + 3y = 1 & ② \end{cases}$

• يمكن كتابة المعادلة ② على الشكل $-4x - 6y = -2$ (بضرب طرفيها في العدد -2)

فتكتب الجملة على الشكل $\begin{cases} -4x + y = -5 \\ 4x + 6y = -2 \end{cases}$ نعلم أن $4x$ و $-4x$ متعاكسان إذن $-4x + 4x = 0$

• نجمع المعادلتين طرفًا لطرف فنتحصل بعد التبسيط على المعادلة : $-5y = -7$ و هي معادلة من الدرجة الأولى بمجهول واحد y.

• هذه المعادلة تقبل حلا واحدا هو $y = \frac{7}{5}$. لحساب x نعوض y بـ $\frac{7}{5}$ في إحدى المعادلتين.

و نجد $x = \frac{8}{5}$. • إذن للجملة حل وحيد هو $\left(\frac{8}{5} ; \frac{7}{5}\right)$.

التحقيق $-4 \times \frac{8}{5} + \frac{7}{5} = -\frac{32}{5} + \frac{7}{5} = -\frac{25}{5} = -5$ ؛ $-2 \times \frac{8}{5} + 3 \times \frac{7}{5} = -\frac{16}{5} + \frac{21}{5} = \frac{5}{5} = 1$

ملاحظة ضربنا طرفي المعادلة ② في العدد -2 قصد الحصول على معادلة بمجهول واحد.
يمكن ضرب طرفي المعادلة ① في -3 و عند الجمع طرفًا لطرف نحصل على معادلة بمجهول واحد x.

تمارين محلولة

تمرين 1 اشترى كل من رضا و سمير أقلاما و كراريس.

اشترى رضا 3 أقلام و كراستين بثمن 85 دينارا و اشترى سمير قلمين و 7 كراريس بثمن 170 دينارا.

• احسب ثمن الكراس الواحد وثمن القلم الواحد.

حل • إختيار المجاهيل

نضع x هو ثمن القلم الواحد و y هو ثمن الكراس الواحد.

• وضع معادلات

من المعطيات نتحصل على : $3x + 2y = 85$ و $2x + 7y = 170$.

إذن نتحصل على جملة معادلتين من الدرجة الأولى بمجهولين x و y :

$$\begin{cases} 3x + 2y = 85 & (1) \\ 2x + 7y = 170 & (2) \end{cases}$$

• حل الجملة :

نحل الجملة بطريقة الجمع.

يمكن كتابة الجملة على الشكل :

$$\begin{cases} 2(3x + 2y) = 2 \times 85 \\ -3(3x + 2y) = -3 \times 170 \end{cases} \quad \text{أي} \quad \begin{cases} 6x + 4y = 170 \\ -6x - 21y = -510 \end{cases}$$

نجمع المعادلتين طرف لطرف فنتحصل على المعادلة ذات المجهول y التالية : $-17y = -340$

هذه المعادلة تقبل حلا واحدا هو $y = 20$.

نعوض y بالعدد 20 في المعادلة (1) نتحصل على المعادلة ذات المجهول x.

$3x + 2 \times 20 = 85$ أي $3x = 45$. هذه المعادلة تقبل حلا واحدا هو $x = 15$.

الجملة تقبل حلا واحدا هو $(15 ; 20)$.

• التحقيق

$$\begin{cases} 3 \times 15 + 3 \times 20 = 85 \\ 2 \times 15 + 7 \times 20 = 170 \end{cases}$$ كل من المساوتين صحيحة.

• الإجابة

ثمن القلم الواحد هو 15 دينارا و ثمن الكراس الواحد هو 20 دينارا.

تمرين 2 محيط مستطيل هو $84\,cm$.

إذا ضاعفنا عرضه و ضربنا طوله في 3، يصبح محيطه يساوي $124\,cm$.

• احسب طول و عرض هذا المستطيل.

حل نضع x عرض المستطيل و y طوله.

لدينا : $2(x+y)=84$ و $2x+3y=124$

لتعيين x و y نحل الجملة
$$\begin{cases} 2(x+y)=84 \\ 2x+3y=124 \end{cases}$$

هذه الجملة تكتب
$$\begin{cases} 2x+2y=84 & (1) \\ 2x+3y=124 & (2) \end{cases}$$

بالطرح طرف لطرف المعادلتين (2) و (1).

نجد $y=40$

بتعويض y بالعدد 40 في المعادلة (1) نجد $2x+80=84$ أي $2x=4$

و بالتالي $x=2$.

ينتج أن طول المستطيل هو $40\,cm$ و عرضه $2\,cm$.

تمرين 3 ABC مثلث حيث $BC=50\,mm$.

• أوجد الطولين AB و AC إذا علمت أن مجموع هذين الطولين هو $70\,mm$ و فرقيهما هو $10\,mm$.

• أنشئ المثلث ABC.

حل لدينا : $AB+AC=70$ و $AB-AC=10$

لتعيين AB و AC نحل الجملة
$$\begin{cases} AB+AC=70 & (1) \\ AB-AC=10 & (2) \end{cases}$$

باستعمال طريقة الجمع و بالجمع طرفًا لطرف المعادلتين (1) و (2) نجد $2AB=80$.

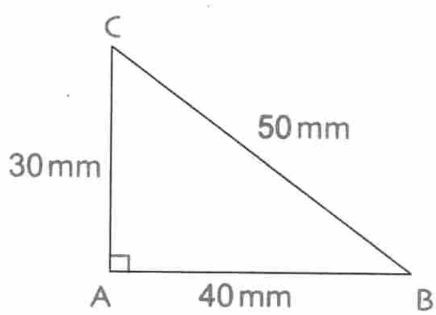
أي $AB=40$

بتعويض AB بالعدد 40 في المعادلة (1)

نجد $40+AC=70$ إذن $AC=30$.

ينتج أن $AB=40\,mm$ و $AC=30\,mm$.

• إنجاز الشكل.



المثلث ABC هو قائم في A.

صحيح أو خاطئ

1 • 1 إذا كان $x = 0$ و $y = 2$ فإن $x - 4y + 8 = 0$.
• 2 إذا كان $x = -1$ و $y = -1$ فإن $x + y + 1 = 0$.
• 3 إذا كان $x + y = 0$ فإن $x = 0$ و $y = 0$.
• 4 إذا كان $3x - y + 1 = 0$ فإن $x = 1$ و $y = 3$.
• 5 إذا كان $2x + 2y - 1 = 0$ فإن $y = -x + \frac{1}{2}$.
• 6 إذا كان $4x + y - 4 = 0$ فإن $x = 0$ و $y = 2$.
• 7 الثنائية $(3 ; 3)$ تحقق الجملة $\begin{cases} x + y = 6 \\ 2x + y - 9 = 0 \end{cases}$
• 8 الثنائية $(0 ; 0)$ تحقق الجملة $\begin{cases} 2x + y = 0 \\ x - y = 0 \end{cases}$

تمارين

حل معادلات من الدرجة الأولى بمجهولين

2 • هل الثنائية $(0 ; 1)$ حل للجمل التالية :

$\begin{cases} 2x + y = 1 \\ 6x + 7y = 7 \end{cases}$ ؛ $\begin{cases} 2x - y = -1 \\ 5x - 3y = 3 \end{cases}$

$\begin{cases} x + y = 1 \\ \frac{1}{2}x - 2y = -2 \end{cases}$

3 • هل الثنائية $(2 ; 1)$ حل للجمل التالية :

$\begin{cases} x = 9 - 4y \\ 3y = 2x + 4 \end{cases}$ ؛ $\begin{cases} 2x + y = 4 \\ 5x + 4y = 17 \end{cases}$

$\begin{cases} 4x - 2 = y \\ 5x - 3y = -1 \end{cases}$

4 • من بين الثنائيات التالية $(0 ; 2)$ ؛ $(1 ; 1)$
$(-2 ; 0)$ عين الثنائية التي تحقق الجملة :

$\begin{cases} x + y = 2 \\ 3x + 4y = 7 \end{cases}$

5 • نفس السؤال 4 بالنسبة للجملتين التاليتين :

$\begin{cases} 5x - y = 2 \\ x + 11y = -22 \end{cases}$ ؛ $\begin{cases} 3x + 5y = 6 \\ x - 4y = 2 \end{cases}$

6 • إذا علمت أن $x = 2$ ؛ عين قيمة y التي تحقق الجملة التالية : $\begin{cases} 5x + 2y = 16 \\ 5x + y = 13 \end{cases}$

7 • حل الجمل التالية :

$\begin{cases} x = 2 \\ x + y = 7 \end{cases}$ ؛ $\begin{cases} y = 0 \\ 4x - 5y = 4 \end{cases}$ ؛ $\begin{cases} x = y \\ x + 2y = 0 \end{cases}$

8 • بيّن أن الجملة : $\begin{cases} 4x + 3y = 5 \\ 5x + 2y = 1 \end{cases}$

تكتب على الشكل : $\begin{cases} 8x + 6y = 10 \\ 15x + 6y = 3 \end{cases}$

9 • حل الجمل التالية بإستعمال طريقة التعويض :

$\begin{cases} x + y = 10 \\ 6x + y = 19 \end{cases}$ ؛ $\begin{cases} 5x - 10y = 35 \\ -9x - 6y = -15 \end{cases}$

$\begin{cases} 3x + 5y = 1 \\ x + 2y = 3 \end{cases}$

10 • حل الجمل التالية بإستعمال طريقة الجمع :

$\begin{cases} 4x + 3y = 5 \\ 2x + y = 2 \end{cases}$ ؛ $\begin{cases} 5u + t = 7 \\ 3u + 2t = 9 \end{cases}$

$\begin{cases} a + 5d = 13 \\ 3a + 4d = 10,4 \end{cases}$

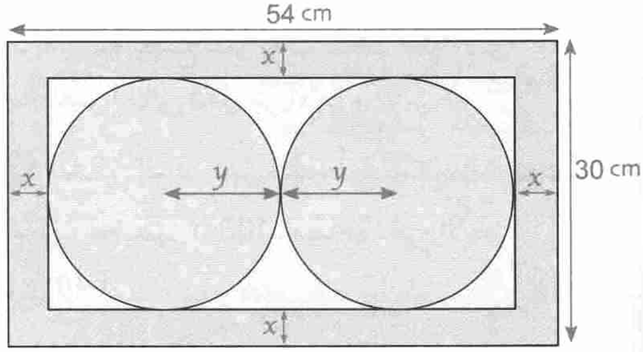
11 • اختر الطريقة التي تفضلها لحل الجمل التالية :

$\begin{cases} 0.4r + 2s = 4 \\ 0,6r + s = 4 \end{cases}$ ؛ $\begin{cases} 3z + 1,2w = 0,9 \\ 6z - 4w = 7,8 \end{cases}$

$\begin{cases} v - 3w = -4 \\ 7v + 10w = 34 \end{cases}$

مسائل

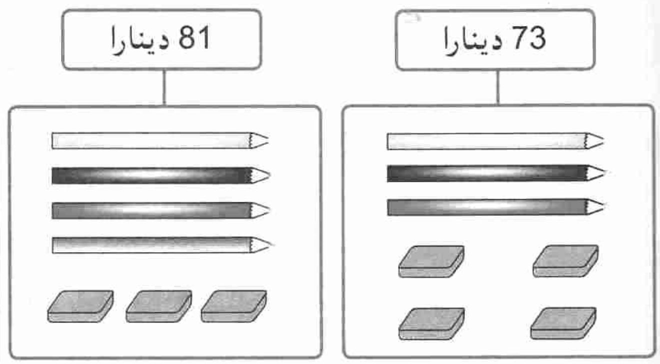
12 لاحظ الشكل التالي :



• اكتب جملة معادلتين بمجهولين ثم عين نصف قطر كل من القرصين و عرض الإطار.

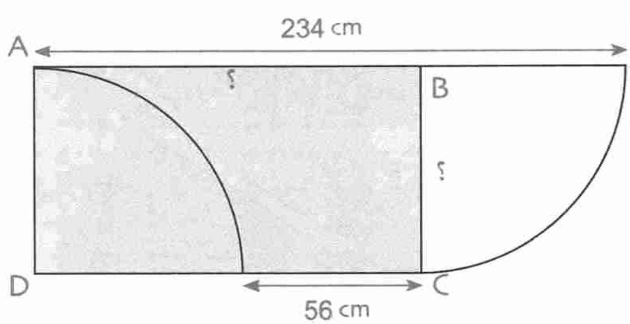
13 • أكتب جملة معادلتين بمجهولين لإيجاد ثمن القلم الواحد و ثمن الممحاة الواحدة.

• حل هذه الجملة.



14 • اكتب جملة معادلتين بمجهولين يسمح بإيجاد طول و عرض المستطيل.

• حل هذه الجملة.



15 ثمن ثلاث حبات برتقال وحبتي موز هو 80 دينارا.
ثمن ثلاث حبات موز وحبتي برتقال هو 95 دينارا.

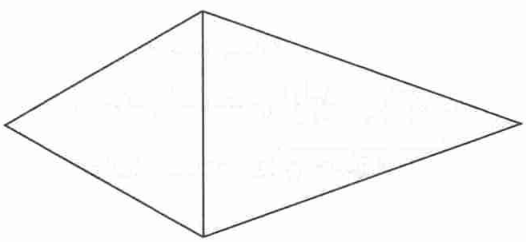
• ما هو ثمن كل من حبة موز وحبة البرتقال.

16 للدخول إلى حديقة التسلية وضع ثمنان للتذاكر : أطفال و كبار.
مجموعة من ثلاثة أطفال و شخص كبير يكلف 290 دينارا و مجموعة من خمسة أطفال و أربعة كبار يكلف 705 دينارا.

• ما هو ثمن تذكرة طفل و ثمن تذكرة شخص كبير.

17 الشكل التالي يتكون من مثلث متقايس الأضلاع و مثلث متساوي الساقين.
محيط المثلث المتقايس الأضلاع هو 42 cm و محيط المثلث المتساوي الساقين هو 48 cm.

• احسب أطوال أضلاع المثلثين.



18 أفكر في عددين : مجموعهما هو 18. إذا طرحت 5 من الأول و 4 من الثاني فينقص جداءهما بـ 63.

• ما هما هذان العددان ؟

19 • أوجد عددين علما أن حاصل قسمتهما هو $\frac{7}{9}$ و فرقهما هو 12.

20 • أوجد عددين علما أن حاصل قسمتهما هو $\frac{7}{12}$ و مجموعهما هو 95.

21 • مجموع عددين طبيعيين هو 2003.
عند إجراء القسمة الإقليدية للعدد الأكبر على العدد الأصغر، يكون حاصل القسمة هو 8 و باقي القسمة هو 77.

• أوجد هذين العددين.

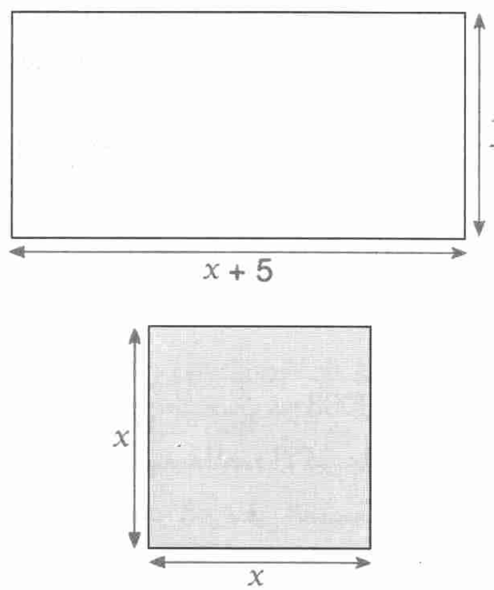
22 1 • حل الجملة التالية :
$$\begin{cases} 5x + 3y = 180 \\ x + y = 40 \end{cases}$$

2 • يوجد عند صاحب مكتبة 40 كتابا و هي نوعان :
سمك البعض منهم هو 5cm و سمك البعض الآخر هو 3cm.
إذا وضعهم صاحب المكتبة متراصين في نفس الرف فتكون هذه الكتب صفا طوله 1,80m.
• ما هو عدد الكتب من كل نوع من النوعين ؟

23 يملك رضا و سمير طوابع بريدية. عند تجميع هذه الطوابع، يكون عددها هو 144.
إذا أعطى رضا طابعين لسمير، فيصبح عند سمير ضعف ما هو عند رضا.
• ما هو عدد الطوابع عند كل ولد ؟

24 محيط مستطيل هو 140cm، طوله x و عرضه y.
إذا ضاعفنا عرضه و أنقصنا 7cm من طوله، نتحصل على مستطيل آخر محيطه يساوي 176cm.
• احسب طول و عرض المستطيل الأول.

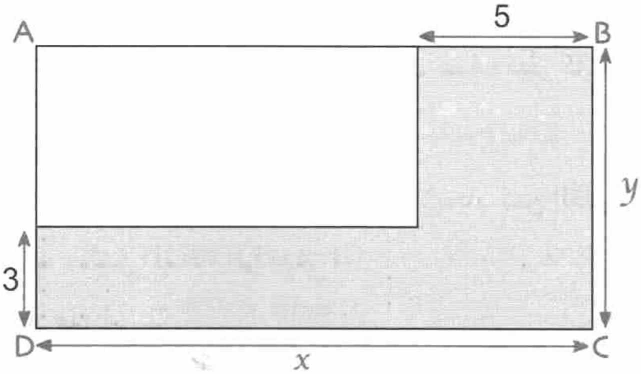
25 الرسمان التاليان يمثلان حقلين : أحدهما مربع الشكل و الآخر مستطيل الشكل.
x، y عددان موجبان.



• أوجد x و y بحيث يكون محيط المربع مساويًا لمحيط المستطيل و طول المستطيل هو ضعف عرضه.

26 عمر الأب هو ثلاثة أمثال عمر إبنه.
بعد 11 سنة يصبح عمر الأب ضعف عمر الإبن.
• ما العمر الحالي لكل من الأب و الإبن ؟

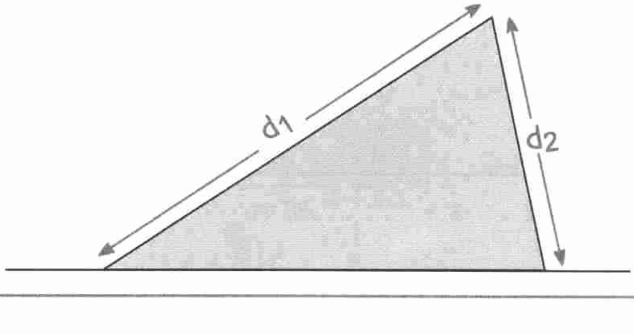
27 الشكل التالي يمثل قطعة أرضية ABCD مستطيلة الشكل، محيطها 100m. مساحة الجزء الأخضر هي $164m^2$.



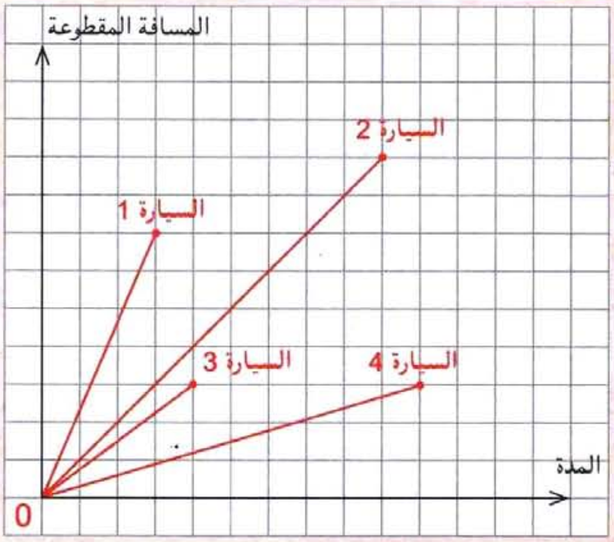
• احسب بالأمتار، الطول x و العرض y لهذه القطعة.

28 1 • عيّن مجموعة قواسم العدد 24 .
2 • اوجد كل الثنائيات $(x \; ; y)$ من عددين طبيعيين بحيث $x^2 - y^2 = 24$

29 يقطع دراج مسلك متكون من جزئيين d_1، d_2 .
(الشكل)
سرعة الدراج لقطع جزء d_1 هي 20 km/h و سرعته لقطع جزء d_2 هي 50 km/h ؛ بفرض أن طول المسلك هو 10 km و أن مدة الصعود تفوق مدة الهبوط بربع ساعة.
t_1 و t_2 مدتي قطع المسافتين d_1 و d_2 على الترتيب.
• احسب كل من t_1، t_2، d_1، d_2.



6 الدوال الخطية - التناسبية



انطلقت 4 سيارات و هي مزودة بنفس كمية البنزين لتتوقف بعد نفوذ الوقود. نعتبر أن كل منها قطعت مسافة بسرعة ثابتة.
لاحظ الشكل المقابل.
كيف يمكن ترتيب هذه السيارات ؟

الكفاءات المستهدفة (التي يجب اكتسابها)

- معرفة الترميز. تعيين صورة عدد بدالة خطية.
- تعيين عدد صورته بدالة خطية معلومة.
- تعيين دالة خطية إنطلاقا من عدد غير معدوم و صورته.
- تعيين دالة خطية إنطلاقا من عدد غير معدوم و صورته.
- تمثيل دالة خطية بيانيا.
- قراءة التمثيل البياني لدالة خطية.
- حساب معامل الدالة الخطية انطلاقا من تمثيلها البياني.
- تمثيل و قراءة و ترجمة وضعية يتدخل فيها مقدار معطي بدلالة مقدار آخر.
- حل مشكلات تتدخل فيها النسبة المئوية أو المقادير المركبة.

استبيان متعدد الإجابات

اختر الإجابة الصحيحة.

السؤال	الإجابة 1	الإجابة 2	الإجابة 3
1 • إذا كان $3x = 2$ فإن …	$x = 2$	$x = \frac{2}{3}$	$x = \frac{3}{2}$
2 • إذا كان $\frac{3}{5} = \frac{x}{2}$ فإن …	$5x = 3 \times 2$	$2x = 3 \times 5$	$x = 3$
3 • إذا كان $x = 1$ فإن …	$-5x = -5$	$-5x = 1$	$-5x = 5$
4 • من أجل $x = \sqrt{2}$ ، العبارة x^2 تساوي …	$2\sqrt{2}$	4	2
5 • من أجل $x = -1$ ، العبارة $\frac{3}{2}x$ تساوي …	$\frac{3}{2}$	$-\frac{3}{2}$	- 5
6 • من أجل $x = 10$ ، العبارة $-\frac{1}{10}x$ تساوي …	1	- 1	- 100
7 • الجدول التالي : $\begin{array}{\|c\|c\|} \hline 30 & 20 \\ \hline 48 & 38 \\ \hline \end{array}$	جدول تناسبية	ليس جدول تناسبية	
8 • الجدول التالي هو جدول تناسبية إذن العدد x هو : … $\begin{array}{\|c\|c\|} \hline 2,5 & 7,5 \\ \hline 4 & x \\ \hline \end{array}$	7	12	9
9 • 50% من العدد 10 يساوي …	5	10	2
10 • 100% من العدد 50 يساوي …	50	0,5	0,05
11 • التمثيل البياني لوضعية تناسبية هو مستقيم …	لا يشمل المبدأ	يشمل المبدأ	
12 • الجدول التالي هو جدول تناسبية. $\begin{array}{\|c\|c\|c\|c\|} \hline x & 2,5 & 7,5 & 22,5 \\ \hline y & 7,5 & 22,5 & 67,5 \\ \hline \end{array}$ من هذا الجدول نستنتج أن : …	$y = 3x$	$y = \frac{1}{3}x$	$y = 30x$

أنشطة تحضيرية

النشاط 1 - مفهوم الدالة

أ) نعتبر الجدول التالي، كل عدد من السطر الثاني يمكن الحصول عليه من عدد السطر الأول عن طريق عملية معينة (أو علاقة).

- أقترح علاقة و أتمم الجدول.

x	2	- 3	5	- 4	6	0,5	1	- 10
y	14	- 21	35					

العلاقة التي تسمح بحساب أعداد السطر الثاني انطلاقا من أعداد السطر الأول تسمى دالة، نرمز إليها بالرمز f.

الأعداد y هي صور الأعداد x بواسطة f.

صورة 2 هي 14. نكتب $f(2) = 14$ أو $f : 2 \longmapsto 14$.

ب) ما هي صورة 3 - ؟ ما هي صورة العدد x ؟

- عبر عن النتائج باستعمال ترميز السؤال 1 • أ).
- ما هو العدد الذي صورته 63 ؟

النشاط 2 - الدوال الخطية

الجدول التالي يسمح بتحويل طول مقدر بالأمتار إلى «الأقدام».

المكان	في أعماق المحيط الهادي	في شاطئ البحر الميت	في شاطئ البحر بتيبازة	قمة جبل الهقار	قمة جبل الشريعة
x هو الإرتفاع (أو الإنخفاض) بالأمتار	- 11035	- 394	1	2485	1629
y هو الإرتفاع (أو الإنخفاض) بالأقدام			3,28		

1 • أ) كيف يسمى جدول من هذا النوع ؟ ماذا يمثل العدد 3,28 ؟

ب) أكمل الجدول السابق.

2 • الدالة المرفقة بهذا الجدول تسمى دالة خطية و معاملها هو 3,28.

أ) ماهي صورة العدد 11035 - ؟ ما هي صورة العدد 2485 ؟ ما هي صورة عدد x بهذه الدالة ؟

ب) ما هي صورة عدد x بدالة خطية معاملها a ؟

النشاط 3 - التمثيل البياني لدالة خطية

الهدف هو دراسة و تمثيل بيانيا دالة خطية معاملها 1,5.

1 • أكمل الجدول التالي للدالة الخطية ذات المعامل 1,5.

x	- 4	- 2	1	4
$f(x)$				

2 • أ) أرسم معلما مبدأه النقطة O و محوراه متعامدان.

• إختر 1cm كوحدة على المحورين (ننصح بإستعمال ورق ميليمتري).

ب) مثل بنقطة كل ثنائية $(x\,;f(x))$ حيث x هو عدد من السطر الأول و $f(x)$ صورة x من السطر الثاني.

جـ) ما هي الخاصية التي تحققها هذه النقط ؟ هل يمكن توقع ذلك؟

• يرمز بـ (d) للمستقيم الذي يشمل هذه النقط. أرسم (d).

3 • أ) عين على المستقيم (d) النقطة P ذات الفاصلة 2.

• اقرأ على الشكل ترتيب هذه النقطة.

• يمكن التحقق من أن : ترتيب P يساوي $x \times 1{,}5$ حيث x هي فاصلة P.

ب) عين على المستقيم (d) النقطة M ذات الترتيب 3.

• اقرأ على الشكل فاصلة هذه النقطة.

• يمكن التحقق من أن : ترتيب M يساوي $k \times 1{,}5$ حيث k هي فاصلة M.

جـ) هل النقطة $N(2\,;3{,}5)$ تقع على (d) ؟

• هل يمكن التحقق من النتيجة باستعمال العلاقة السابقة ؟

نلاحظ أن الإحداثيتين $(x\,;y)$ لنقطة من (d) تحقق العلاقة $y = 1{,}5x$.

المستقيم (d) يسمى التمثيل البياني للدالة الخطية ذات المعامل 1,5.

النشاط 4

نعتبر الجدول التالي :

x	- 2	- 1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	2
y	4	2	1	0	- 1	- 2	- 4

1 • تحقق أن هذا الجدول هو جدول تناسبية. ما هو معاملها ؟

2 • في معلم متعامد مبدأه النقطة O ،

• مثل النقط ذات الاحداثيات $(x\,;y)$ من أجل قيم x الواردة في الجدول السابق و y القيمة المرفقة بها.

• تحقق أن هذه النقط تقع على استقامة واحدة مع المبدأ O .

معارف

1 - الدالة الخطية

تعريف

a عدد معلوم.

عندما نرفق بكل عدد x العدد ax نقول أننا عرفنا دالة خطية.

a هو معامل هذه الدالة الخطية.

العدد ax هو صورة العدد x بالدالة الخطية ذات المعامل a.

- يرمز لدالة خطية بأحد الرموز f ، g ، h ....
- إذا كانت f هي الدالة الخطية ذات المعامل a ، فنكتب $f : x \longmapsto ax$ و نقرأ : الدالة f ترفق x بالعدد ax.
- يرمز إلى صورة x بالدالة الخطية f ذات المعامل a بالرمز $f(x)$. نكتب $f(x) = ax$.

الرمز $f(x)$ يقرأ f لـِ x.

مثال

$a = 5$. الدالة الخطية f ذات المعامل 5 هي الدالة المعرفة بـ : $f : x \longmapsto 5x$

- صورة العدد 1 هي $5\times1 = 5$ و نكتب $f(1) = 5$.
- صورة العدد 3 - هي $5\times(-3) = -15$ و نكتب $f(-3) = -15$.
- صورة العدد 0 هي $5\times0 = 0$ و نكتب $f(0) = 0$.

ملاحظة

الدالة الخطية f ذات المعامل 0 هي الدالة المعرفة بـ : $f : x \longmapsto 0\times x$

هذه الدالة ترفق بكل عدد x العدد 0. نقول أنها دالة خطية ثابتة.

خاصية

إذا كان مقداران متناسبين فإن أحدهما هو صورة الآخر بدالة خطية.

مثال

ثمن المتر من سلك كهربائي 3 دنانير.

ثمن x متر من السلك، بالدنانير هو $3x$ أي الثمن و الطول متناسبان.

أي $3x$ هو صورة الطول x (عدد الأمتار) بالدالة الخطية : $x \longmapsto 3x$.

2 - التمثيل البياني لدالة خطية

تعريف

في المستوي المزود بمعلم، مجموعة النقط ذات الإحداثيات $(x\,; ax)$ تسمى التمثيل البياني للدالة الخطية f ذات المعامل a.

خاصية

التمثيل البياني لدالة خطية معاملها a هو مستقيم يشمل المبدأ.

العدد a يسمى معامل توجيه هذا المستقيم.

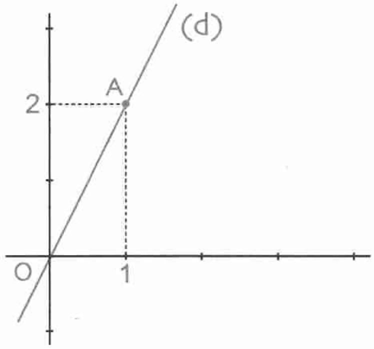
ملاحظة

f هي دالة خطية حيث $f : x \longmapsto ax$ ، تمثيلها البياني (d) في معلم من المستوي.

لدينا : $M(x\,; y)$ تنتمي إلى (d) يعني $y = ax$.

نقول أن $y = ax$ هي معادلة للمستقيم (d).

مثال
- f هي الدالة الخطية المعرفة بـ : $f(x) = 2x$.
- $y = 2x$ هي معادلة للمستقيم (d) الممثل للدالة الخطية f.
- لدينا : $f(1) = 2$. إذن النقطة $A(1 ; 2)$ هي نقطة من (d).
- معامل توجيه المستقيم (d) هو 2.
- لإنشاء (d) يكفي إنشاء النقطة A ثم رسم المستقيم الذي يشمل النقطتين O و A.



3 - التناسبية و الدالة الخطية

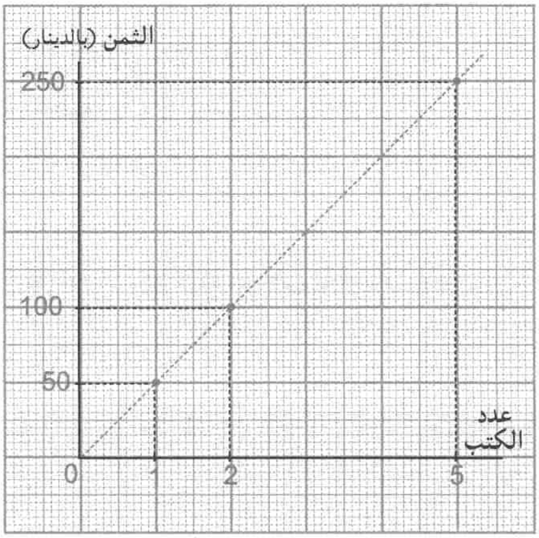
خاصية
التمثيل البياني لمقادير متناسبة يتكون من نقط على استقامة واحدة مع مبدأ المعلم.

مثال
الجدولان التاليان يعطيان ثمن بيع كتب دون تخفيض و بيعها بتخفيض.

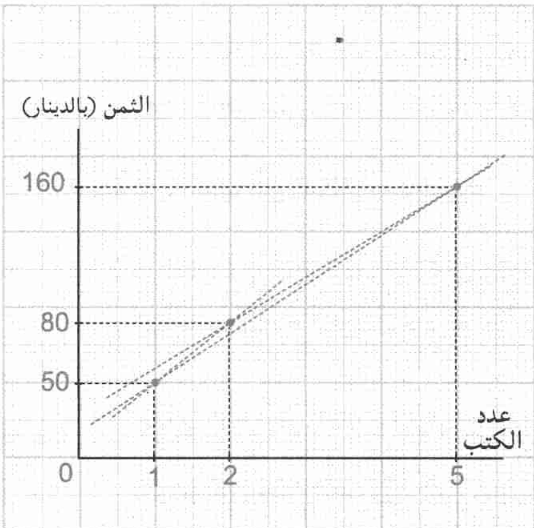
البيع دون تخفيض			
عدد الكتب	1	2	5
الثمن (بالدينار)	50	100	250

البيع بالتخفيض			
عدد الكتب	1	2	5
الثمن (بالدينار)	50	80	160

التمثيلان البيانيان للوضعيتين.



- الأثمان متناسبة مع عدد الكتب.
- النقط على استقامة واحدة مع المبدإ.



- الأثمان ليست متناسبة مع عدد الكتب.
- النقط ليست على استقامة واحدة مع المبدإ.

4 - النسب المئوية و الدالة الخطية

تعريف

k عدد عشري موجب ؛ x مقدار معلوم.

- $k\%$ من المقدار x هو المقدار $\frac{k}{100}x$.
- زيادة المقدار x بـ $k\%$ هو المقدار $x + \frac{k}{100}x$ أي $\left(1 + \frac{k}{100}\right)x$
- تخفيض المقدار x بـ $k\%$ هو المقدار $x - \frac{k}{100}x$ أي $\left(1 - \frac{k}{100}\right)x$

ملاحظات

- الدالة f حيث $f(x) = \frac{k}{100}x$ هي دالة خطية معاملها $\frac{k}{100}$.
- الدالة g حيث $g(x) = \left(1 + \frac{k}{100}\right)x$ هي دالة خطية معاملها $1 + \frac{k}{100}$.
- الدالة h حيث $h(x) = \left(1 - \frac{k}{100}\right)x$ هي دالة خطية معاملها $1 - \frac{k}{100}$.

مثال 1

3% من المقدار x هو المقدار $\frac{3}{100}x$ أي $0{,}03x$.

نلاحظ أن المقدار $0{,}03x$ هو صورة x بالدالة الخطية ذات المعامل $0{,}03$.

بعد زيادة المقدار x بـ 3% يصبح $x + \frac{3}{100}x$ أي $\left(1 + \frac{3}{100}\right)x$ ، أي $1{,}03x$.

نلاحظ أن المقدار $1{,}03x$ هو صورة x بالدالة الخطية ذات المعامل $1{,}03$.

بعد تخفيض المقدار x بـ 3% يصبح $x - \frac{3}{100}x$ أي $\left(1 - \frac{3}{100}\right)x$ ، أي $0.97x$.

نلاحظ أن المقدار $0.97x$ هو صورة x بالدالة الخطية ذات المعامل 0.97.

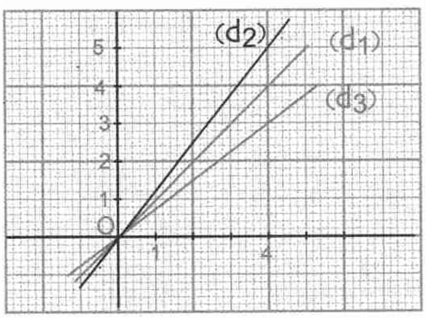
مثال 2

25% من المقدار x هو المقدار $\frac{25}{100}x$ أي $0{,}25x$.

- زيادة المقدار x بـ 25% هو المقدار $\left(1 + \frac{25}{100}\right)x$.
- تخفيض المقدار x بـ 25% هو المقدار $\left(1 - \frac{25}{100}\right)x$.
- التمثيل البياني للدوال الخطية ذات المعاملات :

1 ، $1 + \frac{25}{100}$ و $1 - \frac{25}{100}$ ، على الترتيب

هي المستقيمات (d_1)، (d_2) و (d_3) ، على الترتيب.



طرائق

1 - تعيين صورة عدد بدالة خطية

طريقة

f دالة خطية حيث $f(x) = ax$.
لتعيين صورة عدد t بالدالة الخطية f نحسب العدد at.

تمرين f دالة خطية حيث $f(x) = -3x$
• احسب صور الأعداد -1 ؛ 0 ؛ 2 بالدالة f.

حل لدينا $f(x) = -3x$ و هي صورة كل عدد x بالدالة الخطية f.
$-3\times(-1) = 3$ ؛ إذن صورة -1 هي 3. نكتب $f(-1) = 3$.
$-3\times(0) = 0$ ؛ إذن صورة 0 هي 0. نكتب $f(0) = 0$.
$-3\times(2) = -6$ ؛ إذن صورة 2 هي -6. نكتب $f(2) = -6$.

2 - تعيين عدد الذي صورته بدالة خطية معلومة

طريقة

f دالة خطية حيث $f(x) = ax$ و a عدد.
لتعيين العدد الذي صورته بالدالة الخطية f هي b، نعين x بحيث $ax = b$.

تمرين f هي الدالة الخطية حيث $f(x) = 4x$.
• عين الأعداد التي صورتها بالدالة f هي -4 ؛ -2 ؛ 0 ؛ 1 ؛ 8 على الترتيب.

حل • نعين العدد الذي صورته بالدالة f هي -4. لذلك نبحث عن العدد x بحيث $4x = -4$.
$4x = -4$ يعني $x = -\frac{4}{4} = -1$. إذن -1 هو العدد الذي صورته بالدالة f هي -4.
• $4x = -2$ يعني $x = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}$. إذن $-\frac{1}{2}$ هو العدد الذي صورته بالدالة f هي -2.
• $4x = 0$ يعني $x = 0$. إذن 0 هو العدد الذي صورته بالدلة f هي 0.
• $4x = 1$ يعني $x = \frac{1}{4}$. إذن $\frac{1}{4}$ هو العدد الذي صورته بالدالة f هي 1.
• $4x = 8$ يعني $x = \frac{8}{4} = 2$. إذن 2 هو العدد الذي صورته بالدالة f هي 8.

3 - تعيين دالة خطية إنطلاقا من عدد غير معدوم و صورته

طريقة

• لتعيين دالة خطية f، يكفي تعيين العدد a معامل هذه الدالة الخطية.
• إذا كان t عددا غير معدوم و v صورته بالدالة الخطية f فإن $v = at$
و بالتالي : $a = \frac{v}{t}$.

تمرين • عيّن الدالة الخطية f علما أن صورة العدد 3 بالدالة f هي 4 -.

حل f معرفة كما يلي : $f(x) = ax$

إيجاد العدد a بحيث $f(3) = -4$

$f(3) = -4$ أي $a \times 3 = -4$. إذن $a = -\dfrac{4}{3}$

و بالتالي : الدالة الخطية f هي الدالة التي معاملها $-\dfrac{4}{3}$ و المعرفة كما يلي : $f(x) = -\dfrac{4}{3}x$

4 - تمثيل دالة خطية بيانيا

طريقة

لإنشاء التمثيل البياني لدالة خطية f، يكفي تعيين نقطة منه، مختلفة عن المبدأ.

• التمثيل البياني لدالة خطية f معاملها a، هو مستقيم يشمل مبدأ المعلم. أي النقطة $O(0\ ;\ 0)$.

• لتعيين نقطة أخرى من هذا المستقيم، يكفي إعطاء قيمة للعدد x تختلف عن 0 ثم حساب y بحيث $y = ax$.

تمرين • ارسم التمثيل البياني للدالة الخطية f، معاملها 3 - في معلم متعامد و متجانس مبدأه O.

حل نعلم أن التمثيل البياني للدالة الخطية f، معاملها 3 - هو مستقيم يشمل المبدأ $O(0\ ;\ 0)$.

لرسمه، يكفي تعيين نقطة أخرى منه. نسمي هذا المستقيم (D).

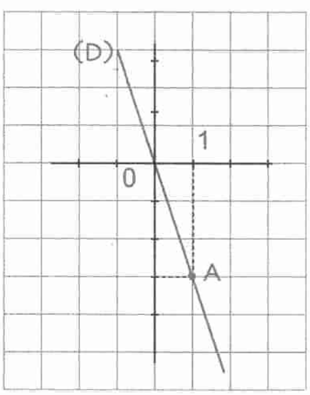
إحداثيا كل نقطة من (D) تحققان المعادلة $y = -3x$.

من أجل $x = 1$ يكون $y = -3 \times 1$

و بالتالي : النقطة A ذات الإحداثيين $(1\ ;\ -3)$ تنتمي إلى (D).

نرسم المستقيم (D) الذي يشمل مبدأ المعلم و النقطة A.

و هو التمثيل البياني للدالة الخطية f، معاملها 3-.



5 - قراءة التمثيل البياني لدالة خطية

طريقة

f دالة خطية، (d) تمثيلها البياني في معلم.

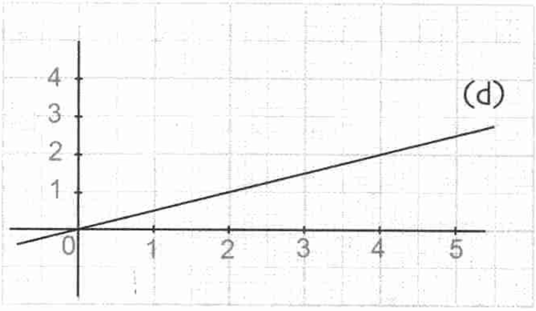
• لقراءة صورة عدد x بالدالة f، نحدد هذا العدد x على محور الفواصل ثم نعين النقطة من (d) التي فاصلتها x. فيكون ترتيب هذه النقطة هو صورة x.

• لقراءة العدد x الذي صورته بالدالة f هي y، نحدد هذا العدد y على محور التراتيب ثم نعين النقطة من (d) التي ترتيبها y. فتكون فاصلة هذه النقطة هو العدد x.

تمرين (d) هو المستقيم الممثل للدالة الخطية f . (الشّكل)

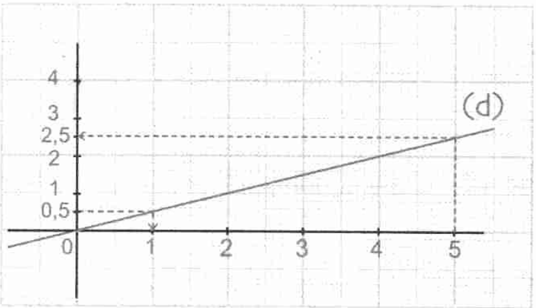
1 • إقرأ صورة العدد 5.

2 • إقرأ العدد الذي صورته $\frac{1}{2}$.



حل 1 • نتبع الخط الأخضر. نقرأ العدد 2,5 على محور التراتيب. العدد 2,5 هو صورة العدد 5 بالدالة الخطية f .

2 • نتبع الخط الأزرق. نقرأ العدد 1 على محور الفواصل. العدد 1 هو العدد الذي صورته هي 0,5 بالدالة الخطية f .



6 - حساب معامل دالة خطية إنطلاقا من تمثيلها البياني

طريقة

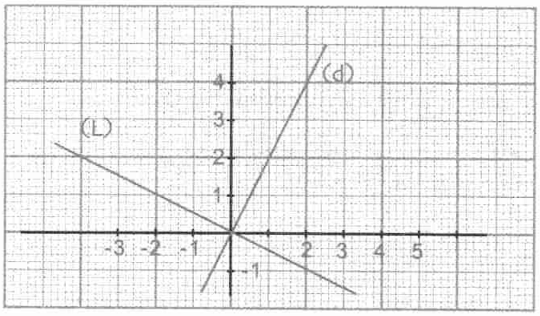
المستقيم (d) هو التمثيل البياني لدالة خطية f.

لتعيين المعامل a للدالة الخطية f، نختار نقطة من المستقيم (d) تختلف عن المبدإ و نقرأ إحداثييها $(m\ ;\ p)$.

فيكون العدد a هو حل المعادلة $p = a \times m$ (أي $a = \frac{p}{m}$).

تمرين في الشّكل المقابل، (d) هو التمثيل البياني لدالة خطية f و (L) التمثيل البياني لدالة خطية g.

عيّن معامل كل من الدالتين f و g.



حل بالقراءة على المستقيم (d) نلاحظ أنّ النقطة $A(2\ ;\ 4)$ تنتمي إلى (d).

إذن معامل الدالة الخطية f هو العدد a الّذي يحقّق $4 = a \times 2$ أي $a = 2$.

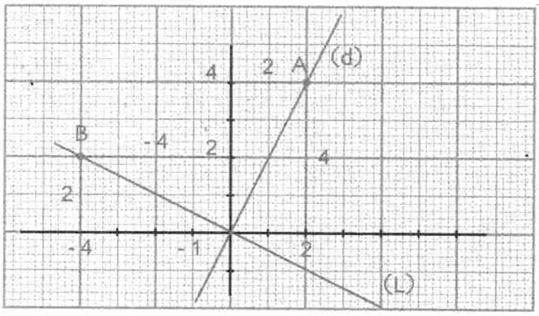
و بالتالي الدالة الخطية f هي $f : x \longmapsto 2x$.

بنفس الكيفية نقرأ على المستقيم (L).

النقطة $B(-4\ ;\ 2)$ تنتمي إلى (L).

إذن معامل الدالة g هو العدد a' الذي يحقق $2 = a'(-4)$ أي $a' = -\frac{1}{2}$

إذن الدّالة الخطّيّة g هي $g : x \longmapsto -\frac{1}{2}x$



تمارين محلولة

تمرين 1 ABC مثلث قائم في B حيث $AB = 3cm$ ؛ $BC = 4cm$.

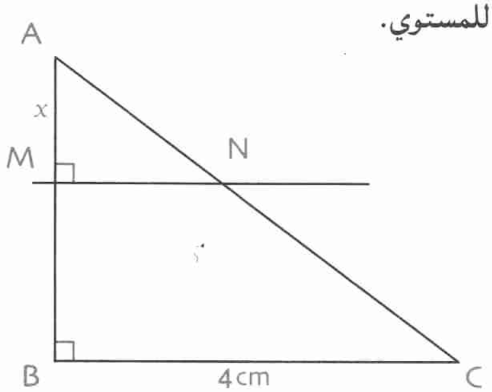
M نقطة من القطعة [AB]. نضع $AM = x$ حيث x مقدر بالسنتيمترات.

المستقيم العمودي على (AB) في النقطة M يقطع (AC) في N.

أ) بيّن أن المحيط P للمثلث AMN هو دالة خطية لـ x.

ب) ما هي قيم x التي يكون من أجلها P أكبر ما يمكن ؟ أصغر ما يمكن ؟

جـ) مثّل بيانيا الدالة الخطية في معلم متعامد و متجانس للمستوي.



حل أ) حساب المحيط P للمثلث AMN.

لدينا : $P = AM + MN + NC$

باستعمال نظرية طالس في المثلثين ABC و AMN

ينتج أن : $\frac{AM}{AB} = \frac{MN}{BC} = \frac{AN}{AC}$

بالتعويض : نجد $\frac{x}{3} = \frac{MN}{4} = \frac{AN}{AC}$

حساب AC. في المثلث القائم ABC ينتج أن $AC^2 = AB^2 + BC^2$

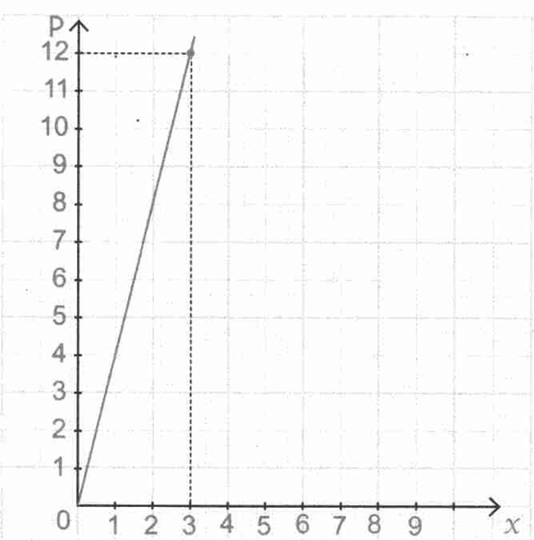
و بعد التعويض، نتحصل على $AC = 5$.

لدينا $\frac{MN}{4} = \frac{x}{3}$ إذن $MN = \frac{4}{3}x$ و $\frac{AN}{5} = \frac{x}{3}$ إذن $AN = \frac{5}{3}x$

$$P = AM + MN + NC$$

$$= x + \frac{4}{3}x + \frac{5}{3}x = \frac{12}{3}x = 4x$$

أي $P = 4x$ و بالتالي المحيط P هو دالة خطية لـ x معاملها هو 4 حيث $x \geq 0$.



ب) • يكون P أكبر ما يمكن إذا كانت M منطبقة على B أي $AM = 3$.

في هذه الحالة، يكون $P = 4 \times 3 = 12$

أي $P = 12\ cm$.

• يكون P أصغر ما يمكن إذا كانت M منطبقة على A

أي $AM = 0$.

في هذه الحالة المثلث غير موجود.

و بالتالي : $P = 0$.

جـ) التمثيل البياني للدالة الخطية التي ترفق بكل عدد x العدد P. هو قطعة المستقيم الممثل في المعلم المقابل.

تمرين 2 وضع مبلغ أولي x (بالدنانير) في صندوق توفير لمدة سنة كاملة.
بلغت الفوائد 2,5% من المبلغ x.
وضع المبلغ الأولي x و الفوائد الناتجة في نهاية السنة في نفس الصندوق لمدة سنة أخرى و بنفس الفوائد، و هكذا خلال 2 سنوات.

1 • عبّر، بدلالة x، عن المبلغ الإجمالي S_1 المحصل عليه بعد السنة الأولى.
• بيّن أن المبلغ S_1 هو دالة خطية للعدد x.
• عيّن معاملها.

2 • احسب، بدلالة x، المبلغ الإجمالي S_8 المحصل عليه بعد 8 سنوات.

3 • احسب الفوائد المحصل عليها (على شكل نسبة مئوية للمبلغ الأولي x) بعد 8 سنوات.

حل

1 • لدينا $S_1 = x + \frac{2,5}{100}x$

$$\left[1 + \frac{2,5}{100}\right]x$$

أي $S_1 = 1,025x$

المبلغ S_1 هي الدالة $x \longmapsto 1,025x$ و هذه الدالة خطية.

معامل هذه الدالة هو 1,025.

2 • بعد سنتين يكون المبلغ S_2 هو $S_2 = 1,025x + \frac{2,5}{100} \times 1,025x$

$$= (1,025x)(1 + 0,025) = (1,025)(1,025)x = (1,025)^2 x$$

$$S_2 = (1,025)^2 x$$

بعد 8 سنوات، يكون المبلغ S_8 هو $S_8 = (1,025)^8 x$

أي $S_8 \approx 1,22x$

3 • لدينا $S_8 = 1,22x$

$$= (1 + 0,22)x$$

$$= x + 0,22x$$

$$= x + \frac{22}{100}x$$

ينتج أن $S_8 = x + \frac{22}{100}x$ أي $S_8 = x + 22\% \, x$.

إذن : تبلغ الفوائد المحصل عليها بعد 8 سنوات القيمة 22% من المبلغ الأولي x.

تمارين و مسائل

صحيح أو خاطئ

1 1 • الدالة $f : x \longmapsto \frac{1}{2}x$ هي دالة خطية .

2 • الدالة $f : x \longmapsto \sqrt{2}\,x$ ليست دالة خطية.

3 • الدالة $f : x \longmapsto x - x^2$ هي دالة خطية.

4 • معامل الدالة الخطية $f : x \longmapsto -4x$ هو 4.

5 • زيادة مقدار بـ 10% يعني ضربه في 1,1.

6 • زيادة مقدار بـ 100% يعني ضربه في 2.

7 • ضرب مقدار في 3 يعني زيادته بمقدار 200%.

8 • تخفيض مقدار بـ 10% يعني ضربه في 0,99.

9 • 50% من المقدار x هو $\frac{1}{2}x$.

10 • 100% من المقدار x هو x.

تمارين

تعين صورة - تعين سابقة

2 من بين الدوال التالية، عين الدوال الخطية.

$f : x \longmapsto 3x - 12$ ؛ $g : x \longmapsto x(x^2 + x)$

$h : x \longmapsto 3x$ ؛ $t : x \longmapsto x^2$

$k : x \longmapsto -\frac{1}{8}x$ ؛ $l : x \longmapsto \sqrt{3}\,x$

3 نعرف الدوال f ، g ، h ، k بالمساويات التالية :

$f(x) = 15x$ ؛ $g(x) = -8x$

$h(x) = 0,25x$ ؛ $k(x) = -\sqrt{2}\,x$

• تحقق أن الدوال f ، g ، h ، k هي دوال خطية ثم عين معامل كل منها.

4 • احسب صور الأعداد 15 ؛ $\frac{3}{2}$ ؛ -8

بالدلة الخطية f حيث $f : x \longmapsto \frac{1}{20}x$

5 f هي دالة خطية معرفة كما يلي : $f(x) = -2x$

• أحسب $f\left(\frac{1}{4}\right)$ ؛ $f(-5)$ ؛ $f\left(-\frac{1}{2}\right)$.

6 f هي دالة خطية معرفة كما يلي : $f(x) = -8x$

• ما هو العدد الذي صورته هي 24 بالدالة f.

7 f هي الدالة الخطية المعرفة بـ : $f : x \longmapsto 1,4\,x$

1 • احسب $f(0)$ ؛ $f(1)$ ؛ $f(2)$.

2 • ما هو العدد الذي صورته هي -7 بالدالة f.

تمثيل دالة خطية بيانيا

المستوي مزود بمعلم متعامد و متجانس مبدأه النقطة O.

8 • مثّل بيانيا الدالة الخطية f

المعرفة كما يلي : $f : x \longmapsto \frac{2}{5}x$

9 • مثّل بيانيا الدالة الخطية g

المعرفة كما يلي : $g : x \longmapsto -4x$

10 • مثّل بيانيا الدالة الخطية f حيث : $f\left(-\frac{1}{3}\right) = 2$

• ما هو معامل هذه الدالة ؟

11 • مثّل بيانيا كل دالة خطية f معينة بمعاملها a معطى في كل حالة من الحالات التالية :

a = 2 ؛ a = -1 ؛ a = -5 ؛ a = 0,5

12 • مثّل بيانيا كل دالة من الدالتين f و g حيث

$f : x \longmapsto 2x$ و $g : x \longmapsto -\frac{1}{2}x$

• ماذا تلاحظ بالنسبة للمستقيمين المرسومين ؟

تعيين عبارة الدالة الخطية بمعرفة عدد و صورته

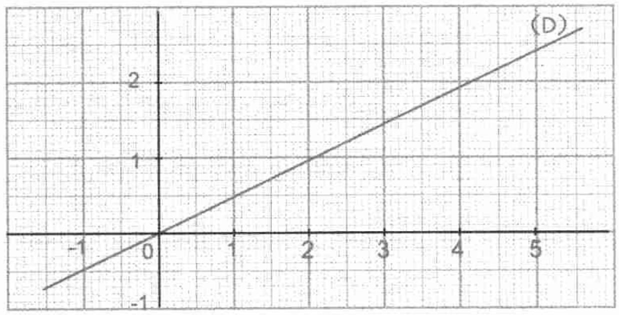
13 • عيّن الدالة الخطية f حيث $f(-3) = 5,4$

14 • عيّن الدالة الخطية g حيث $g(2,1) = 1,2$

15 • عيّن الدالة الخطية h حيث $h : 11 \longmapsto -2$

قراءة التمثيل البياني لدالة خطية

16 • (D) هو التمثيل البياني لدالة خطية f. (الشكل)

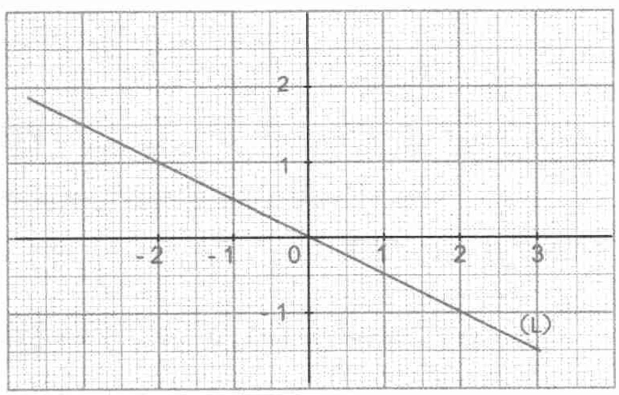


1 • عيّن صورة كل من العددين 1 و 1-.

2 • ما هو العدد الذي صورته 1 ؟

3 • عيّن الدالة الخطية f الممثلة بالمستقيم (D).

17 • (L) هو التمثيل البياني لدالة خطية g. (الشكل)



1 • عيّن صورة كل من العددين 0 و 1.

2 • عيّن العدد الذي صورته 1,5-.

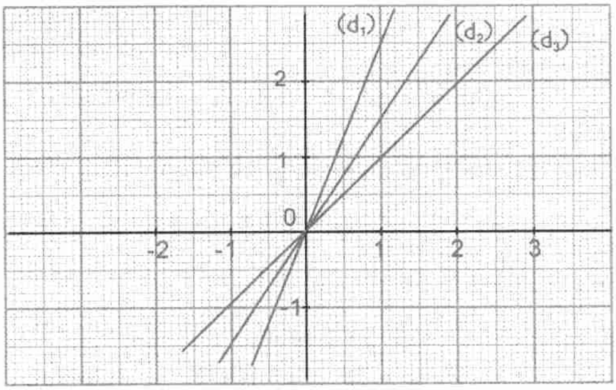
3 • عيّن الدالة الخطية g الممثلة بالمستقيم (L).

18 1 • ارفق كل مستقيم بالدالة الخطية التي يمثلها.

الدوال الخطية هي : $f : x \longmapsto \frac{3}{2}\,x$

$h : x \longmapsto x$ ؛ $g : x \longmapsto \frac{5}{2}\,x$

2 • ما هو معامل توجيه كل مستقيم ؟



19 • (d) هو المستقيم الممثل للدالة الخطية f

حيث $f : x \longmapsto -\frac{2}{3}\,x$ في معلم مبدأه O.

1 • هل النقطتان $A(-1,5\ ;\ 1)$ و $B(1\ ;\ -0,6)$

تنتميان إلى المستقيم (d) ؟

2 • أرسم المستقيم (d).

التناسبية

20 • هل محيط مربع هو دالة خطية لطول ضلعه ؟

برر إجابتك.

21 إليك الجدول التالي :

x	5	-2	3	-6	12
y	12,5	-5	7,5	-15	30

1 • هل هو جدول تناسبية ؟ لماذا ؟

2 • عبّر عن y بدلالة x.

3 • مثّل بيانيا الدالة التي ترفق x بالعدد y.

22 • تسير سيارة في طريق سريع. عند الإنطلاق، كان خزان السيارة يحتوي على 56 لترا من البنزين.

نفرض أن الكمية المستهلكة من البنزين ثابتة و تساوي 9 لترات في 100 km.

ليكن x المسافة بالكيلومترات، التي قطعتها السيارة منذ الإنطلاق.

1 • عبّر عن كمية البنزين $f(x)$ المستهلكة بدلالة x.

هل الدلة f دالة خطية ؟

2 • عبّر عن كمية البنزين $g(x)$ المتبقية في الخزان بدلالة x.

هل الدالة g دالة خطية ؟

النسب المئوية و الدالة الخطية

23 إذا إزداد (أو انخفض) مقدار x بنسبة معينة، نتحصل على الكمية $f(x)$ حيث $f(x) = kx$

• احسب قيم k، حدّد إن تعلق الأمر بزيادة أو بتخفيض الكمية x و حدد النسبة المئوية في كل حالة من الحالات التالية :

$k = 1{,}82$ ؛ $k = 0{,}73$ ؛ $k = 2{,}7$ ؛ $k = 0{,}385$

24 يزداد مقدار x بنسبة 10% ثم ينخفض المقدار الناتج بنسبة 10%.

• هل النتيجة المحصل عليها تساوي x ؟

إنتبه : للإجابة، يمكن التعبير عن كل نتيجة بدلالة x.

25 نريد أن يزداد طول l بنسبة 38%.

• في أي عدد يجب ضرب l ؟

26 نريد أن ينخفض حجم v بنسبة 64%.

• في أي عدد يجب ضرب v ؟

27 يزداد ارتفاع h عند ضربه في 1,132.

• عبّر عن زيادة للارتفاع h بنسبة مئوية.

28 تخفض كتلة m بضربها في 0,75.

• عبّر عن تخفيض m بنسبة مئوية.

29 في فصل الشتاء كمية المياه المعدنية المستهلكة هي 0,97.

• هل يتعلق الأمر بزيادة أو بتخفيض ؟

• عبّر عن تغير هذه الأسعار بنسبة مئوية.

مسائل

30 لتكن f الدالة الخطية المعرفة بـ : $f(x) = \frac{4}{3}x$

1 • احسب صورة العدد 3.

2 • احسب العدد الذي صورته 6 -.

3 • ما هو معامل الدالة الخطية f ؟

4 • في المستوي المزود بمعلم متعامد ومتجانس مبدأه O ارسم المستقيم (d) الممثل للدالة الخطية f.

5 • هل النقطة $A\left(1 ; \frac{3}{4}\right)$ تنتمي إلى (d) ؟

هل النقطة $B(1 ; -1)$ تنتمي إلى (d) ؟

31 نفرغ ماء في كأس شكله أسطوانة دوران، ارتفاعه 12 cm وقطر قاعدته 8 cm.

• برهن أن الدالة التي ترفق بالإرتفاع h (بالسنتيمترات) كمية الماء الموجودة في الكأس أي حجم الماء (بالسنتيمترات المكعبة) هي دالة خطية.

• عيّن معامل هذه الدالة.

32 • عيّن الدالة الخطية g حيث تمثيلها البياني يشمل النقطة $M\left(12 ; -\frac{1}{3}\right)$.

33 على خريطة طريق. يمكن قراءة السلم : $\frac{1}{200\,000}$

• هل المسافة على الخريطة هي دالة خطية للمسافة الحقيقية ؟

34 في فترة تخفيض أسعار، يمكن قراءة على واجهة دكان ما يلي : « 40% تخفيض على كل المواد »

• برهن أن الثمن بعد التخفيض هو دالة خطية للثمن قبل التخفيض.

35 ازداد ثمن الوقود بمحطة بنزين بنسبة قدرها 3%.

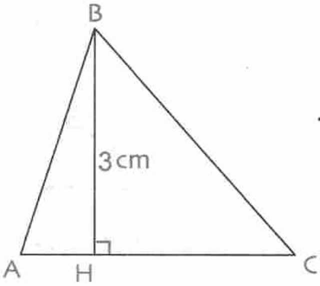
• برهن أن الثمن الجديد هو دالة خطية للثمن القديم.

36 إليك الشكل المقابل.

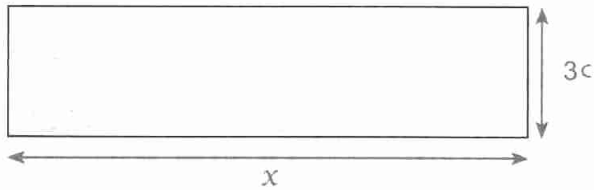
ABC المثلث حيث $AC = x$.

• هل مساحة هذا المثلث هي دالة خطية للعدد x ؟

• برّر إجابتك.



37 نعتبر المستطيل التالي :



• هل مساحة المستطيل هي دالة خطية للعدد x ؟ علّل إجابتك.

• هل محيط هذا المستطيل هو دالة خطية للعدد x ؟ علّل إجابتك.

38 يقترح بائع التذاكر للدخول إلى ملعب كرة القدم الأثمان التالية :

عدد المقابلات في السنة	30	20	10	5
الثمن بالدينار	2100	1400	700	350

• هل هذا الجدول هو جدول تناسبية ؟

• إذا كانت الإجابة «نعم». عيّن الدالة الخطية التي ترفق عدد المقابلات بالثمن المقابل.

39 عند بيع مادة، يحقق تاجر ربحا نسبته 35% من ثمن الشراء.

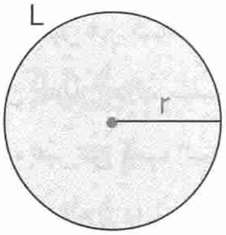
• احسب ثمن بيع هذه المادة علما أن ثمن شرائها هو 140 دينار.

• احسب ثمن شرائها علما أن ثمن بيعها هو 202,50 دينار.

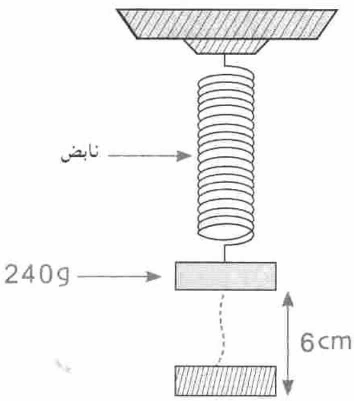
40 عبّر عن المحيط L لدائرة، بدلالة نصف قطرها r.

• بيّن أن L هي دالة خطية للعدد r.

• ما هو معامل هذه الدالة الخطية ؟



41 يتمدد نابض بـ 6cm عندما تعلق بطرفه كتلة قدرها 240g . (أنظر الشكل).



نقبل أن التمدد متناسب مع الكتلة المعلقة.

1 • ما هي الكتلة التي يجب تعليقها حتى يكون تمدّد النابض هو 5cm؟

2 • إذا كان طول النابض الحر (لم تعلق فيه كتلة) هو 18 cm، فما هي الكتلة التي يجب تعليقها حتى يكون تمدد النابض هو 28cm؟

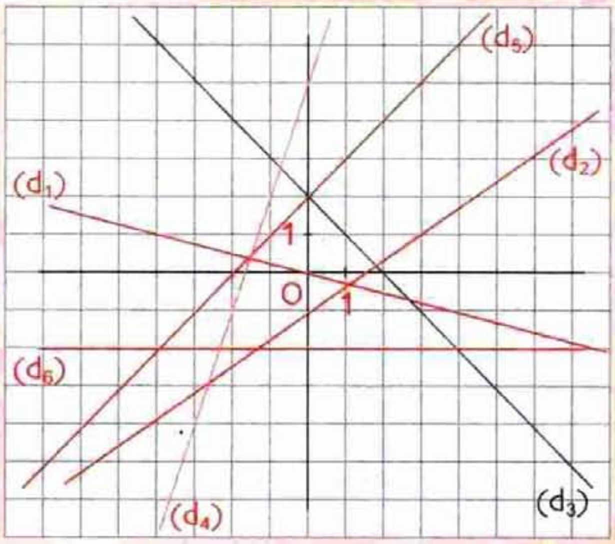
42 ارتفعت كمية المياه المخزنة في أحد السدود بنسبة قدرها 12%، فأصبح فيه $12000000 m^3$ من الماء في سنة 2004. و في سنة 2005، انخفض المخزون بنسبة 10%.

1 • كم كان مخزون السد في سنة 2003؟

2 • ماهي كمية الماء المخزنة في سنة 2004؟

7 الدوال التآلفية

1 - الدالة التآلفية
2 - الدالة الخطية المرفقة بدالة تآلفية
3 - التمثيل البياني لدالة تآلفية
4 - تناسب التزايدات



(d_1) : $y = -\frac{1}{4}x$ | (d_4) : $y = 3x + 5$

(d_2) : $y = \frac{2}{3}x - 1$ | (d_5) : $y = x + 2$

(d_3) : $y = -x + 2$ | (d_6) : $y = -2$

المستقيمات (d_1)، (d_2)، (d_3) (d_4)، (d_5)، (d_6)

هي تمثيلات بيانية لدوال خطية أو ثابتة أو تآلفية.

الكفاءات المستهدفة
(التي يجب اكتسابها)

- معرفة الترميز.
- تعيين صور عدد بدالة تآلفية.
- تعيين عدد صورته بدالة تآلفية معلومة.
- تعيين دالة تآلفية انطلاقا من عددين وصورتيهما.
- تمثيل دالة تآلفية بيانيا.
- قراءة التمثيل البياني لدالة تآلفية.
- تعيين المعاملين و انطلاقا من التمثيل البياني لدالة تآلفية.
- إنجاز تمثيل بياني لوضية يتدخل فيها مقداران أحدهما معطى بدلالة الآخر، قراءته و تفسيره.

استبيان متعدد الإجابات

اختر الإجابة الصحيحة.

السؤال	الإجابة 1	الإجابة 2	الإجابة 3
1. إذا كان $x = 6$ فإن $\frac{1}{3}x$ يساوي ...	18	2	3
2. إذا كان $x = -\frac{1}{2}$ فإن $-\frac{1}{2}x$ يساوي ...	$\frac{1}{4}$	4	$-\frac{1}{4}$
3. إذا كان $x = -2$ فإن $2x - 4$ يساوي ...	-8	0	4
4. إذا كان $3x - 1 = 0$ فإن x يساوي ...	1	3	$\frac{1}{3}$
5. إذا كان $5x + 2 = 0$ فإن x يساوي ...	-10	$-\frac{2}{5}$	$\frac{2}{5}$
6. صورة العدد $\frac{1}{2}$ بالدالة الخطية $x \longmapsto 2x$ هي ...	1	2	4
7. صورة العدد 0 بالدالة الخطية $x \longmapsto -2x$ هي ...	-10	0	7
8. العدد الذي صورته 3 بالدالة الخطية $x \longmapsto 3x$ هو ...	$\frac{1}{3}$	9	1
9. العدد الذي صورته 0 بالدالة الخطية $x \longmapsto -7x$ هو ...	-1	0	7
10. التمثيل البياني للدالة الخطية $x \longmapsto \frac{1}{2}x$ يشمل ...	مبدأ المعلم	النقطة $A(0\,;\,1)$	النقطة $B(1\,;\,0)$
11. التمثيل البياني للدالة الخطية $x \longmapsto 4x$ يشمل النقطة ...	$A(-1\,;\,4)$	$B(-1\,;\,-4)$	$C(-1\,;\,0)$

أنشطة تحضيرية

النشاط 1 - الدالة التآلفية

ثمن المتر المكعب الواحد ($1\ m^3$) من الماء هو 2,50 دينار و ثمن الإشتراك يقدر بـ 1,50 دينار لكل ثلاثي.
و بهذا، من أجل إستهلاك $21\ m^3$ من الماء، تحسب فاتورة الإستهلاك كما يلي : $2,50 \times 21 + 1,50 = 54$
إذن تقدر الفاتورة بـ 54 دينارا.

1 • أنقل و اكمل الجدول التالي :

	جانفي - فيفري مارس	أفريل - ماي جوان	جويلية - أوت سبتمبر	أكتوبر - نوفمبر ديسمبر
كمية الإستهلاك بالأمتار المكعبة	21	30	0	45
الثمن بالدينار				

2 • أ) ليكن x الاستهلاك في ثلاثي (بالأمتار المكعبة) و $f(x)$ الثمن المرفق بالفاتورة (بالدنانير).
• أكتب مراحل حساب $f(x)$.
ب) هل قيمة الفاتورة متناسبة مع عدد الأمتار المكعبة المستهلكة ؟ علل إجابتك.

3 • في الثلاثي الثالث (جويلية - أوت - سبتمبر) الإستهلاك منعدم. ماذا يمثل $f(0)$ ؟

4 • أ) احسب $f(30) - f(21)$ ؛ $f(45) - f(30)$. ماذا تمثل هذه الفوارق ؟

ب) احسب النسبتين : $\dfrac{f(30) - f(21)}{30 - 21}$ و $\dfrac{f(45) - f(30)}{45 - 30}$. ماذا تلاحظ ؟

النشاط 2 - التمثيل البياني لدالة تآلفية

نعتبر الدالة التآلفية f المعرفة كما يلي : $x \longmapsto 0,5x + 4$

1 • انقل و أكمل الجدول التالي :

x	-2	0	1	2
$f(x)$				
النقط ذات الإحداثيات $(x\ ;f(x))$	A	B	C	D

2 • أ) ارسم معلما متعامدا و متجانسا مبدأه النقطة O.
علم النقط A، B، C، D التي إحداثياها $(x\ ;f(x))$ الناتجة من الجدول السابق.
ب) ما هي الملاحظة التي يمكنك تقديمها حول وضعية هذه النقط ؟

3 • أ) ارسم في المعلم السابق، التمثيل البياني (d') للدالة الخطية $x \longmapsto 0{,}5x$.

ب) النقطة O هي نقطة من (d') ، فاصلتها هي فاصلة B.

ضع على (d') النقط A' ، C' ، D' التي لها نفس الفواصل مع النقط A ، C ، D على الترتيب.

جـ) عين إحداثيي كل من الأشعة : $\overrightarrow{OB}$ ، $\overrightarrow{A'A}$ ، $\overrightarrow{C'C}$ و $\overrightarrow{D'D}$.

4 • أ) ما هي صورة كل نقطة من النقط A' ، O ، C' ، D' بالإنسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{OB}$ ؟

ب) استنتج أن النقط A ، B ، C ، D تنتمي إلى نفس المستقيم (d) الذي يشمل B.

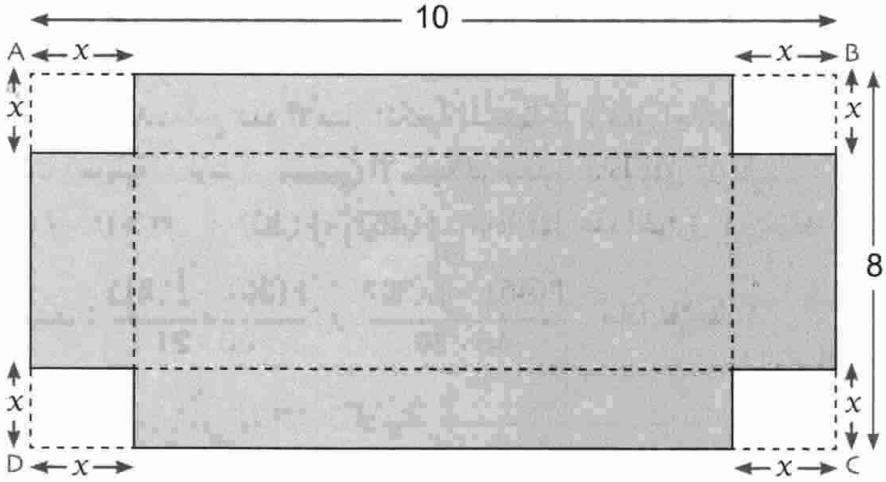
هل هذا يؤكد ملاحظة السؤال 2 • ب) ؟

النشاط 3 - مثال لدالة ليست تآلفية

الشكل المقابل يمثل نشر علبة على شكل متوازي المستطيلات، ننزع منها غطائها.

نضع x ارتفاع هذه العلبة بحيث $0 < x < 3$

و نفرض أن $AB = 10cm$ و $AD = 8cm$.



1 • عبّر، بدلالة x ؛ عن المساحة $\mathcal{A}$ لقاعدة العلبة (بـ cm^2).

2 • احسب، بدلالة x ؛ الحجم $\mathcal{V}(x)$ للعلبة (بـ cm^3).

3 • احسب النسبتين $\dfrac{\mathcal{V}(1) - \mathcal{V}(0{,}5)}{1 - 0{,}5}$ و $\dfrac{\mathcal{V}(1{,}5) - \mathcal{V}(1)}{1{,}5 - 1}$ ثم قارن بينهما.

ماذا تستنتجه بالنسبة إلى الدالة التي ترفق بكل عدد x ، الحجم $\mathcal{V}(x)$.

معارف

1 - الدالة التآلفية

تعريف

a، b عددان معلومان.
عندما نرفق بكل عدد x العدد $ax + b$، نقول أننا عرفنا دالة تآلفية.
a و b هما معاملا هذه الدالة التآلفية.
العدد $ax + b$ هو صورة العدد x بالدالة التآلفية ذات المعاملين a و b.

ملاحظات

1 • يرمز للدالة التآلفية بإحدى الرموز التالية f ، g ، h ، ....
2 • إذا كان $ax + b$ هو صورة x بالدالة التآلفية f ، نكتب : $f : x \longmapsto ax + b$
و نكتب أيضا : $f(x) = ax + b$

أمثلة

1 • الدالة f حيث $f(x) = 3x + 5$ هي دالة تآلفية معاملاها هما 3 و 5.
• صورة العدد 1 بالدلة f هي $f(1)$ حيث $f(1) = 3\times1 + 5 = 8$
• صورة العدد 0 بالدالة f هي $f(0)$ حيث $f(0) = 3\times0 + 5 = 5$
2• الدالة g حيث $g(x) = x^2 + x$ ليست دالة تآلفية
(لأن $g(x)$ لا تكتب على الشكل $ax + b$).

حالات خاصة

• إذا كان $b = 0$ فإن $f(x) = ax$. في هذه الحالة الدالة f هي دالة خطية.
• إذا كان $a = 0$ فإن $f(x) = b$. في هذه الحالة الدالة f هي الدالة ثابتة.

2 - الدالة الخطية المرفقة بدالة تآلفية

تعريف

a، b عددان معلومان.
الدالة $x \longmapsto ax$ هي الدالة الخطية المرفقة بالدالة التآلفية $x \longmapsto ax + b$.

مثال

• الدالة $x \longmapsto \frac{1}{2}x$ هي الدالة الخطية المرفقة بالدالة التآلفية $x \longmapsto \frac{1}{2}x + 3$.
• الدالة $x \longmapsto \frac{1}{2}x$ هي الدالة الخطية المرفقة أيضا بالدالة التآلفية $x \longmapsto \frac{1}{2}x - 2$.

ملاحظة

يمكن إيجاد دوال تآلفية أخرى بحيث تكون الدالة الخطية $x \longmapsto \frac{1}{2}x$ مرفقة لهذه الدوال.
لذلك، يكفي تغيير قيمة b.

3 - التمثيل البياني لدالة تآلفية

خاصية

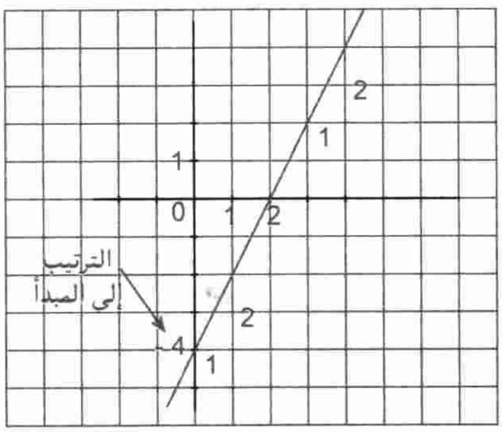
التمثيل البياني للدالة التآلفية $x \longmapsto ax + b$ هو مستقيم.
معادلة هذا المستقيم هي $y = ax + b$.

ملاحظات

1 • المستقيم (d) الممثل للدالة التآلفية $x \longmapsto ax + b$ يقطع محور تراتيب المعلم في النقطة ذات الإحداثيين $(0 ; b)$. فنقول أن العدد b هو الترتيب إلى المبدأ لهذا المستقيم.
2 • تنتمي نقطة $M(x ; y)$ إلى المستقيم (d) إذا و فقط إذا كان $y = ax + b$.
(أي إحداثيا النقطة M تحقق معادلة المستقيم (d)).

مثال

(d) هو المستقيم الذي معادلته $y = 2x - 4$.
• معامل توجيه (d) هو 2.
• الترتيب إلى المبدأ هو 4- وهو ترتيب النقطة التي يقطع فيها (d) محور التراتيب.
إحداثيا هذه النقطة هما $(0 ; -4)$.
• النقطة $A(-1 ; -5)$ ليست نقطة من المستقيم (d) لأن 1- و 5- لا يحققان معادلة المستقيم (d) :
$-5 \neq 2\times(-1) - 4$

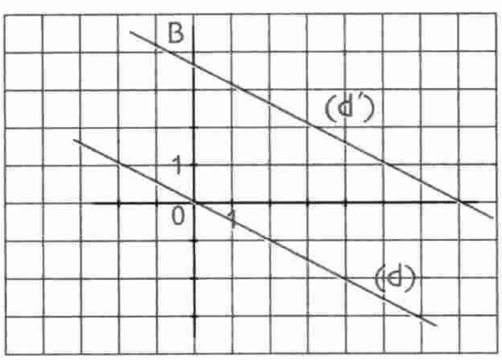


خاصية

المستقيم الممثل للدالة التآلفية $x \longmapsto ax + b$ يوازي المستقيم الممثل للدالة الخطية المرفقة $x \longmapsto ax$.

ملاحظة

• (d′) هو المستقيم الممثل للدالة التآلفية $x \longmapsto ax + b$
و (d) هو المستقيم الممثل للدالة الخطية المرفقة $x \longmapsto ax$.
• لدينا : (d′) و (d) متوازيان.
• (d′) هو صورة (d) بالإنسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{OB}$
إحداثياه هما $(0 ; b)$ أي $\overrightarrow{OB}\ (0 ; b)$.



4 - تناسب التزايدات

خاصية

f هي الدالة التآلفية $x \longmapsto ax + b$
من أجل كل عددين u و v حيث $u \neq v$ لدينا : $\dfrac{f(v) - f(u)}{v - u} = a$.

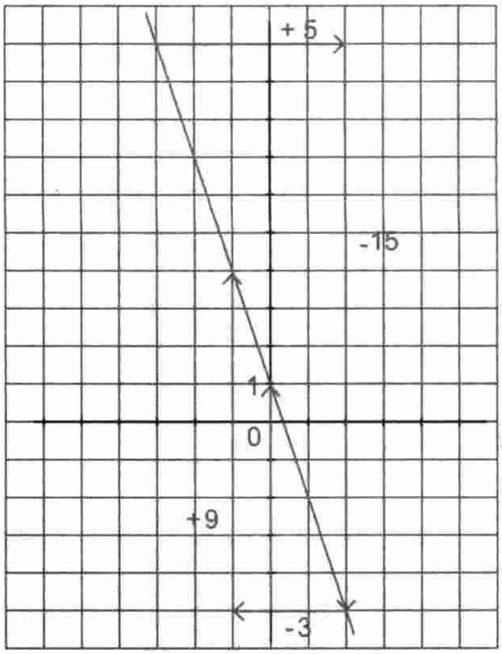
- $f(v) - f(u)$ يسمى تزايد الصورة.
- $v - u$ يسمى تزايد المتغير.
- تزايد الصورة متناسب مع تزايد المتغير و معامل التناسبية هو a.
- إذا علم عددان و صورتاهما بالدالة التآلفية f فيمكن حساب معامل هذه الدالة.
- عندما يتغير x (يزداد أو ينقص) بمقدار h فإن الصورة $f(x)$ تتغير بالمقدار ah أي $f(x + h) = f(x) + ah$.

مثال 1 f هي الدالة التآلفية حيث $f(x) = 4x - 1$ لدينا : $f(1) = 3$ و $f(2) = 7$

و $\dfrac{f(2) - f(1)}{2 - 1} = \dfrac{7 - 3}{1} = 4$

مثال 2 f هي الدالة التآلفية حيث $f(x) = -3x + 1$

الجدول التالي يبين تأثير معامل التناسبية.



$x \xrightarrow{+5} \xrightarrow{-3}$

x	-3	2	-1
$f(x)$	10	-5	4

$f(x) \xrightarrow{-15} \xrightarrow{+9}$

$(-3)\times(+5) = -15$ $(-3)\times(-3) = +9$

$\dfrac{-15}{+5} = \dfrac{+9}{-3} = -3$

الجدول المقابل هو جدول تناسبية.

تزايد الصورة	-15	-3
تزايد المتغير	+5	+9

طرائق

1 - تعيين صورة عدد بدالة تآلفية

طريقة

f دالة تآلفية معرفة بـ : $f(x) = ax + b$ حيث a و b عددان معلومان.
لتعيين صورة العدد t بالدالة التآلفية f نحسب العدد $at + b$.

تمرين f هي الدالة التآلفية المعرفة بـ : $f(x) = 2x - 5$

• احسب صورة كل من الأعداد -2 ؛ $-\frac{1}{2}$ ؛ $\sqrt{2}$ ؛ 3 بالدالة f

حل • صورة العدد -2 هي $f(-2)$ حيث $f(-2) = 2(-2) - 5 = -4 - 5 = -9$

أي $f(-2) = -9$ (أي صورة -2 بالدالة التآلفية f هي -9)

• صورة العدد $-\frac{1}{2}$ هي $f(-\frac{1}{2})$ حيث $f(-\frac{1}{2}) = 2(-\frac{1}{2}) - 5 = -1 - 5 = -6$

أي $f(-\frac{1}{2}) = -6$.

• صورة العدد $\sqrt{2}$ هي $f(\sqrt{2})$ حيث $f(\sqrt{2}) = 2\times\sqrt{2} - 5$.

• صورة العدد 3 هي $f(3)$ حيث $f(3) = 2(3) - 5 = 6 - 5 = 1$

أي $f(3) = 1$.

2 - تعيين عدد صورته بدالة تآلفية معلومة

طريقة

f دالة تآلفية معرفة بـ : $f : x \longmapsto ax + b$ حيث a و b عددان معلومان.
ليكن k عدد معلوم.
لإيجاد العدد x الذي صورته هي k بالدالة التآلفية f يكفي حل المعادلة $ax + b = k$ ذات المجهول x.

تمرين f دالة تآلفية حيث $f : x \longmapsto 3x - 5$

• عين العدد x الذي صورته بالدلة f هي 2.
• عين العدد x الذي صورته بالدلة f هي -2.
• عين العدد x الذي صورته بالدلة f هي 0.

حل • تعيين العدد x بحيث $f(x) = 2$.

لدينا : $f(x) = 2$ يعني $3x - 5 = 2$ أي $3x = 7$. و بالتالي $x = \frac{7}{3}$

• تعيين العدد x بحيث $f(x) = -2$.

لدينا : $f(x) = -2$ يعني $3x - 5 = -2$ أي $3x = 3$. و بالتالي $x = 1$

• تعيين العدد x بحيث $f(x) = 0$.

لدينا : $f(x) = 0$ يعني $3x - 5 = 0$ أي $3x = 5$. و بالتالي $x = \frac{5}{3}$

3 - تعيين دالة تآلفية إنطلاقا من عددين و صورتيهما

طريقة

لتعيين الدالة التآلفية f إنطلاقا من عددين x_0 و x_1 و صورتيهما y_0 و y_1 على الترتيب،
يكفي حل الجملة $\begin{cases} ax_0 + b = y_0 \\ ax_1 + b = y_1 \end{cases}$ ذات المجهولين a و b.
وتكون الدالة التآلفية f معرفة بـ : $f(x) = ax + b$

تمرين • عيّن الدالة التآلفية f حيث $f(-1) = 4$ و $f(3) = -6$.

حل f دالة تآلفية إذن f معرفة كما يلي : $f(x) = ax + b$

لدينا : $f(-1) = a(-1) + b = 4$ و $f(3) = a \times 3 + b = -6$

بالتالي نحصل على الجملة $\begin{cases} -a + b = 4 & ① \\ 3a + b = -6 & ② \end{cases}$ ذات المجهولين a و b.

نحل هذه الجملة بطريقة التعويض.

من المعادلة ① نستنتج أن $b = a + 4$ و بتعويض b بـ $a + 4$ في المعادلة ②

ينتج أن $3a + a + 4 = -6$

أي $4a = -10$ و بالتالي : $a = -\frac{5}{2}$

لدينا $b = a + 4$ و $a = -\frac{5}{2}$. إذن $b = -\frac{5}{2} + 4 = \frac{3}{2}$

و بالتالي $a = -\frac{5}{2}$ و $b = \frac{3}{2}$.

إذن الدالة التآلفية f حيث $f(-1) = 4$ و $f(3) = -6$

هي الدالة المعرفة بـ : $f(x) = -\frac{5}{2}x + \frac{3}{2}$.

4 - تمثيل دالة تآلفية بيانيا

طريقة

f دالة تآلفية حيث $f : x \longmapsto ax + b$.

(d) التمثيل البياني للدالة في المستوي مزود بمعلم.

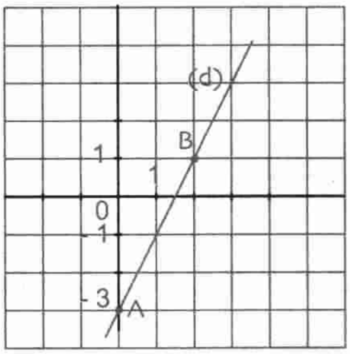
• لرسم المستقيم (d)، يكفي تعين نقطتين مختلفتين منه.

تمرين f دالة تآلفية حيث $f : x \longmapsto 2x - 3$.

(d) المستقيم الممثل للدالة f في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس مبدأه O.

• أنشئ التمثيل البياني (d) للدالة f.

حل • نعلم أن التمثيل البياني للدالة التآلفية f حيث : $f : x \longmapsto 2x - 3$
هو مستقيم (d) معادلته $y = 2x - 3$.
• إذن لرسم المستقيم (d) يكفي تعيين نقطتين منه.
• نختار قيمتين لـ x و نعين صورتيهما بالدالة f.
لدينا : $f(0) = -3$ إذن النقطة $A\,(0\,;\,-3)$ تنتمي إلى (d).
$f(2) = 1$ إذن النقطة $B\,(2\,;\,1)$ تنتمي إلى (d).
• نضع النقطتين A و B في المعلم.
• نرسم المستقيم (AB) أي المستقيم (d).
هذا المستقيم هو التمثيل البياني للدالة f .

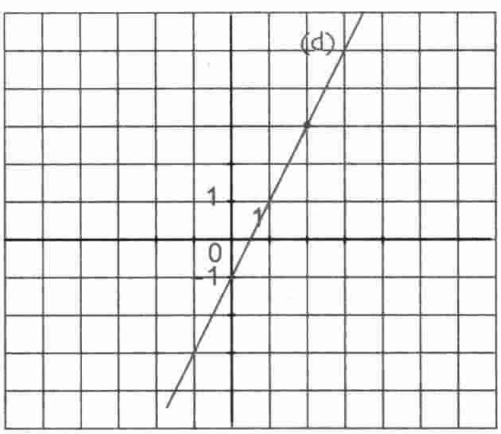


5 - قراءة التمثيل البياني لدالة تآلفية

طريقة

f دالة تآلفية و (d) تمثيلها البياني في المستوي المزود معلم.
• لقراءة صورة عدد x بالدالة التآلفية f نعين النقطة من (d) التي فاصلتها x_0 ثم نقرأ ترتيبها على محور التراتيب.
• لقراءة العدد الذي صورته بالدالة التآلفية f هي y_0، نعين النقطة من (d) التي ترتيبها y_0 ثم نقرأ فاصلتها على محور الفواصل.

تمرين f دالة تآلفية، تمثيلها البياني (d). (الشكل)
• إقرأ صورة العدد 3.
• إقرأ العدد الذي صورته 1-.
• إقرأ العدد الذي صورته 3-.



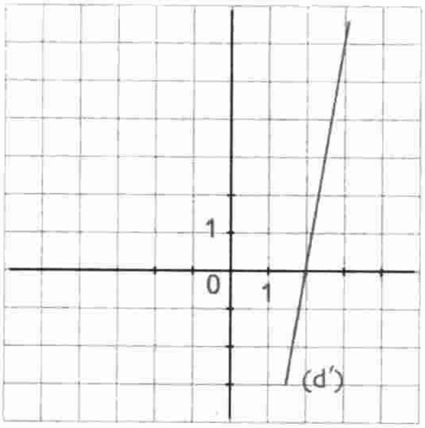
حل بالقراءة على الشكل نجد :
• صورة العدد 3 هي 5.
• العدد الذي صورته 1- هو 0.
• العدد الذي صورته 3- هو 1-.

6 - تعيين المعاملين a و b إنطلاقا من التمثيل البياني لدالة تآلفية

طريقة

(d) هو التمثيل البياني لدالة تآلفية f.
لتعيين المعاملين a و b يكفي تعيين نقطتين $A\,(x_A\,;\,y_A)$ و $B\,(x_B\,;\,y_B)$ من (d)
ثم حل الجملة $\begin{cases} ax_A + b = y_A \\ ax_B + b = y_B \end{cases}$ ذات المجهولين a و b.

ملاحظة يمكن، في بعض الحالات، قراءة الترتيب إلى المبدإ (أي المعامل b) ثم البحث عن a بحل المعادلة $y_A = ax_A + b$ حيث $(x_A \; ; \; y_A)$ احداثيا نقطة أخرى معلومة A من (d).



تمرين 1 (d′) هو التمثيل البياني لدالة تآلفية g. (الشكل)

- عيّن المعاملين a و b للدالة g.

حل لدينا النقطة A (2 ; 0) تنتمي إلى (d′)

النقطة B (3 ; 6) تنتمي أيضا إلى (d′)

نبحث أولا عن a أي $a = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \dfrac{6 - 0}{3 - 2} = 6$

نبحث عن b :

لدينا $y_A = 6 \times x_A + b$

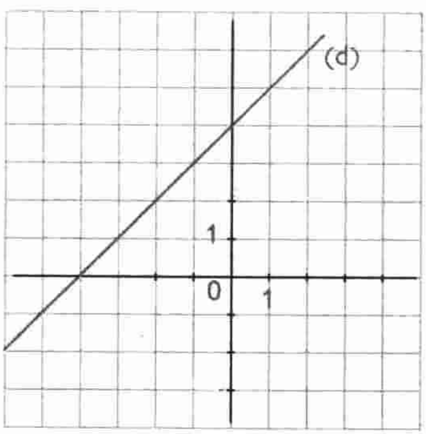
$0 = 6 \times 2 + b$

$0 = 12 + b$ إذن $b = -12$

ينتج أن الدالة g معرفة بـ : $g : x \longmapsto 6x - 12$

تمرين 2 (d) هو التمثيل البياني لدالة تآلفية f. (الشكل)

- عين المعاملين a و b للدالة f.



حل f معرفة بـ : $f : x \longmapsto ax + b$.

(d) هو المستقيم الممثل للدالة f.

عل الشكل، نقرأ b = 4 و هو الترتيب إلى المبدأ

(أي ترتيب نقطة تقاطع (d) مع محور التراتيب)

النقطة A (-3 ; 1) تنتمي إلى (d).

إذن $-3 \times a + b = 1$ أي $-3 \times a + 4 = 1$ بالتالي $a = 1$.

ينتج أن الدالة التآلفية f معرفة بـ : $f : x \longmapsto x + 4$.

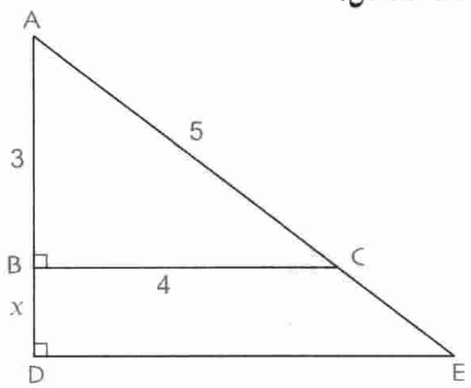
ملاحظة في التمرين الثاني، تحصلنا على المعامل b و هو الترتيب إلى المبدإ بالقراءة المباشرة على الشكل.
بينما في التمرين الأول هذه القراءة غير ممكنة على الشكل المعطى.
لذلك، طبقنا طريقة حساب المعاملين بحساب أولاً a ، نسبة تزايد الدالة بين عددين مختلفين ثم استنتاج المعامل b.

تمارين محلولة

تمرين 1 المثلثان ABC و ADE قائمان في B و D على الترتيب. (لاحظ الشكل)

الوحدة هي السنتيمتر.

نعلم أن $AB = 3$ ؛ $BC = 4$ ؛ $AC = 5$ و $BD = x$



1 • أ) عبّر عن AD بدلالة x.

ب) عبّر عن DE و AE بدلالة x.

2 • برهن أن المحيط P للمثلث ADE هو دالة تآلفية لـ x.

3 • أ) احسب P من أجل $x = 3,6$.

ب) احسب x من أجل $P = 41,2$.

حل 1 • أ) $AD = x + 3$

ب) المستقيمان (BC) و (DE) يعامدان نفس المستقيم (AD) إذن (BC) يوازي (DE).

بتطبيق نظرية طالس في المثلثين ABC و ADE

نتحصل على التناسب التالي : $\dfrac{AD}{AB} = \dfrac{AE}{AC} = \dfrac{DE}{BC}$

من التناسب $\dfrac{AD}{AB} = \dfrac{DE}{BC}$ ينتج أن $\dfrac{x+3}{3} = \dfrac{DE}{4}$. إذن $DE = \dfrac{4}{3}x + 4$

من التناسب $\dfrac{AE}{AC} = \dfrac{AD}{AB}$ ينتج أن $\dfrac{AE}{5} = \dfrac{x+3}{3}$. إذن $AE = \dfrac{5}{3}x + 5$

2 • حساب المحيط P للمثلث ADE.

لدينا : $P = AB + BD + DE + AC + CE$

$$= 3 + x + \frac{4}{3}x + 4 + 5 + \frac{5}{3}x + 5$$

$$= 4x + 17$$

إذن $P = 4x + 17$ و بالتالي P هي دالة تآلفية لـ x معرفة بـ : $P : x \longmapsto 4x + 17$

3 • أ) حساب P من أجل $x = 3,6$

لدينا $P = 4x + 17 = 4\times3,6 + 17 = 31,4$

إذن من أجل $x = 3,6$ يكون $P = 31,4\text{ cm}$

ب) حساب x من أجل $P = 41,2$

لذلك : نحل المعادلة $4x + 17 = 41,2$ أي $4x = 24,2$ و بالتالي $x = 6,05\text{ cm}$

إذن من أجل $P = 41,2\text{ cm}$ يكون $x = 6,05\text{ cm}$.

تمرين 2 f و g دالتان معرفتان كما يلي :

$f(x) = 2,25x + 3$ و $g(x) = 3x + 2,25$

1 • تحقق أن كل من f و g دالة تآلفيتان.

2 • عيّن معاملي كل منهما.

3 • ما هو العدد x الذي يحقق $f(x) = g(x)$ ؟

4 • ليكن (d_1) التمثيل البياني للدالة f و (d_2) التمثيل البياني للدالة g في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس مبدأه O.

• ماذا يمثل العدد x المحصل عليه في السؤال 3 ؟

• ارسم المستقيمين (d_1) و (d_2).

حل

1 • صورة كل عدد x بالدالتين f و g من الشكل $ax + b$.

إذن الدالتان f و g تآلفيتان.

2 • معاملا f هما 2,25 و 3 و معاملا g هما 3 و 2,25

3 • العدد x الذي يحقق $f(x) = g(x)$ هو حل المعادلة $f(x) = g(x)$.

لدينا $f(x) = g(x)$ يعني $2,25x + 3 = 3x + 2,25$

أي $0,75x - 0,75 = 0$

أي $0,75x = 0,75$

و بالتالي $x = \frac{0,75}{0,75}$. إذن $x = 1$

إذن العدد x الذي يحقق $f(x) = g(x)$ هو العدد 1.

أي $f(1) = g(1)$.

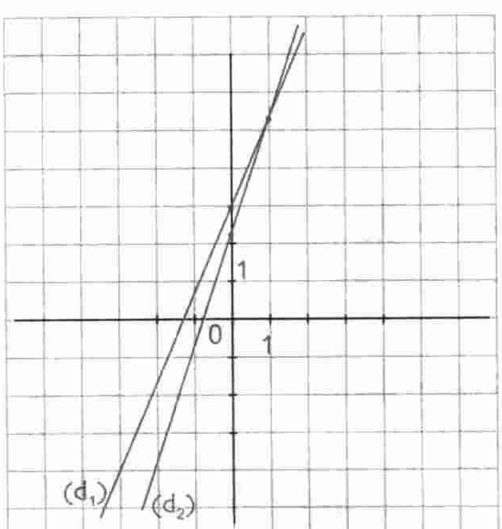
4 • بما أن $f(1) = g(1)$ فإن النقطة $A(1 ; f(1))$ من (d_1) تنطبق على النقطة $B(1 ; g(1))$.

العدد 1 يمثل فاصلة نقطة تقاطع المستقيمن (d_1) و (d_2).

لدينا $f(1) = 5,25$

$f(0) = 3$

$g(0) = 2,25$



تمارين و مسائل

صحيح أو خاطئ

1 1 • الدالة f حيث $f(x) = x$ دالة تآلفية.

2 • الدالة f حيث $f(x) = -2$ ليست دالة تآلفية.

3 • الدالة f حيث $f(x) = x^2 - x$ دالة تآلفية.

4 • صورة العدد 1 - بالدلة التآلفية f حيث $f(x) = -x + 1$ هي 0.

5 • صورة العدد 2 الدالة التآلفية g حيث $f(x) = \frac{3}{2}x - 2$ هي 0.

6 • معاملا الدالة التآلفية f حيث $f(x) = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$ هما $-\frac{1}{2}$ و $\frac{1}{2}$.

7 • التمثيل البياني للدالة التآلفية f حيث $f(x) = -x + 2$ يشمل مبدأ المعلم.

8 • التمثيل البياني للدالة التآلفية g حيث $g(x) = \sqrt{2}x + 1$ يشمل النقطة $A(0 ; 1)$.

9 • العدد الذي صورته هي 1 - الدالة التآلفية f حيث $f(x) = x + 1$ هو العدد 2 -

10 • العدد الذي صورته هي 0 بالدالة التآلفية f حيث $f(x) = \frac{1}{2}x + 1$ هو العدد 2 -

تمارين

التعرف على دالة تآلفية

2 • من بين الدوال التالية، عيّن الدوال التآلفية.

$f : x \longmapsto \frac{1}{2}x^2$ ؛ $g : x \longmapsto \frac{1}{2}x + 2$

$h : x \longmapsto -\sqrt{3}x + 1$ ؛ $k : x \longmapsto 4x$

$p : x \longmapsto 5$

3 • من بين الدوال التالية، عيّن الدوال التآلفية و حدد معاملي كل دالة.

$f : x \longmapsto -x - 2$ ؛ $g : x \longmapsto 4x^2 + 8$

$h : x \longmapsto -12x$ ؛ $k : x \longmapsto 0,25$

تعيين صورة عدد معلوم أو عدد صورته معلومة

4 نعتبر الدالة التآلفية f المعرفة كما يلي :

$$f(x) = 3x - 4$$

• احسب $f\left(-\frac{1}{2}\right)$.

5 g هي الدالة التآلفية المعرفة كما يلي :

$$g(x) = -4x + 6$$

• احسب $g\left(\frac{1}{4}\right)$ و $g\left(\frac{3}{2}\right)$.

6 • عيّن صورة كل من الأعداد التالية 4، $\frac{1}{2}$، 2,4 - بالدالة التآلفية f حيث $f : x \longmapsto 5x + 2$.

7 نعتبر الدالة التآلفية g المعرفة كما يلي :

$$g(x) = 2x - 1$$

• ما هو العدد الذي صورته بالدالة g هي 5 - ؟

8 نعتبر الدالة التآلفية h المعرفة كما يلي :

$$h(x) = \frac{4}{3}x + 2$$

• ما هو العدد الذي صورته بالدالة h هي 3 ؟

9 نعتبر الدالة التآلفية t المعرفة كما يلي :

$$t(x) = -3x + \frac{1}{2}$$

• ما هو العدد الذي صورته بالدالة t هي 1 - ؟

تمثيل بيانيا دالة تآلفية

في التمارين التالية، المستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس مبدأه النقطة O.

10 • مثّل بيانيا الدالة التآلفية f المعرفة بـ :

$$f(x) = -3x + 5$$

11 • مثّل بيانيا الدالة التآلفية g المعرفة بـ :

$$g(x) = -7x + \frac{2}{3}$$

12 • مثّل بيانيا الدالة التآلفية h المعرفة بـ :

$h(x) = \frac{1}{7}x + 2$.

تعيين الدالة التآلفية إنطلاقا من عددين و صورتيهما

13 • عيّن الدالة التآلفية f حيث :

$f(9) = -\frac{19}{2}$ و $f(2) = -1$.

14 • عيّن الدالة التآلفية g حيث :

$g(-1) = -5{,}3$ و $g(2{,}5) = 1$.

15 • عيّن الدالة التآلفية h حيث :

$h(3) = -3$ و $h(-3) = -7$.

16 • عيّن الدالة التآلفية t حيث :

$t\left(\frac{1}{6}\right) = -\frac{1}{3}$ و $t\left(\frac{1}{3}\right) = -\frac{1}{2}$.

17 • عيّن الدالة التآلفية k حيث :

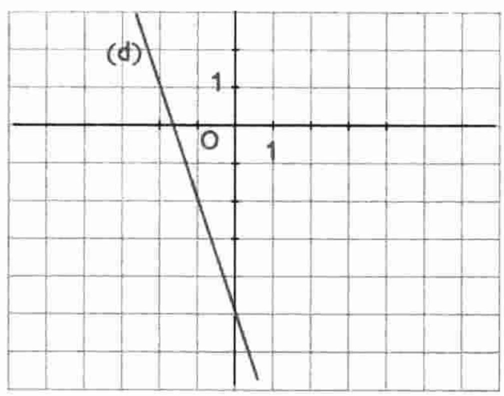
$k : 4 \longmapsto 5$ و $k : 2 \longmapsto -1$

18 • عيّن الدالة التآلفية p حيث :

$p : 2{,}5 \longmapsto -13$ و $p : 1 \longmapsto 8$.

القراءة البيانية

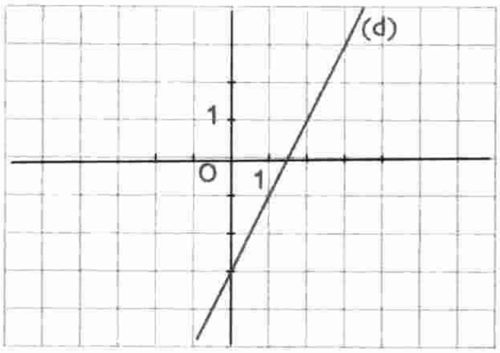
19 • المستقيم (d) هو التمثيل البياني للدالة التآلفية f.



1 • ما هي صورة 2- بالدالة f ؟

2 • ما هو العدد الذي صورته بالدالة f هي 2- ؟

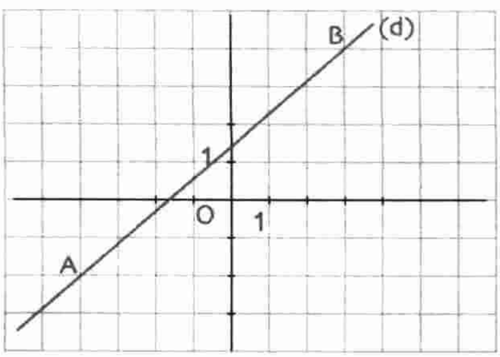
20 • المستقيم (d) هو التمثيل البياني للدالة التآلفية g.



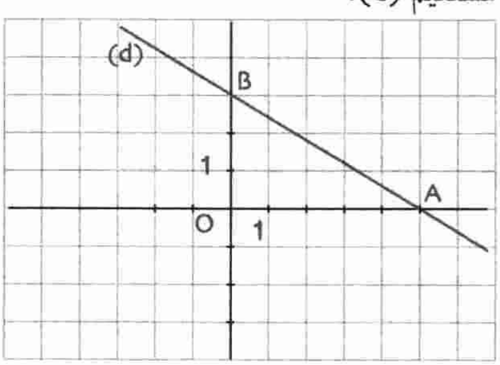
• ما هي صورة العدد 1 بالدالة g ؟
• ما هي صورة العدد 3 بالدالة g ؟
• ما هو العدد الذي صورته 3- بالدالة g ؟
• ما هو العدد الذي صورته 1 بالدالة g ؟

تعيين الدالة التآلفية المرفقة بمستقيم معلوم

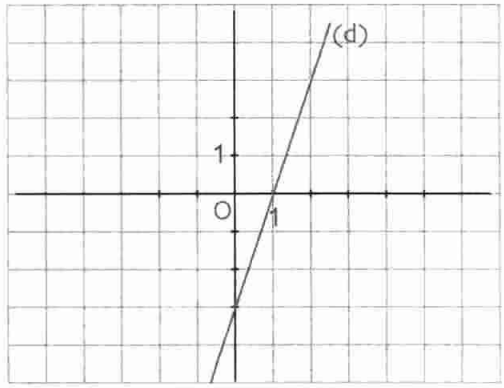
21 • عيّن الدالة التآلفية f الممثلة في الشكل التالي بالمستقيم (d).



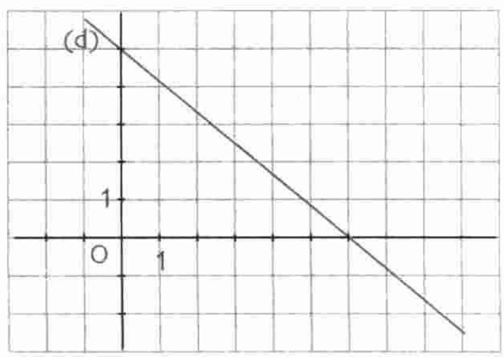
22 • عيّن الدالة التآلفية g الممثلة في الشكل التالي بالمستقيم (d).



23 • عيّن المعاملين a و b للدالة التآلفية f إنطلاقا من تمثيلها البياني (d).



24 • عيّن المعاملين a و b للدالة التآلفية g إنطلاقا من تمثيلها البياني (d).



مسائل

25 نعتبر الدالتين f و g المعرفتين كما يلي :

$f(x) = 2x - 11$ و $g(x) = -\frac{5}{2}x + 7$

1 • ما هما معاملا كل من الدالتين f و g ؟

2 • أ) احسب صورة العدد 0 بكل من الدالتين f و g.

ب) احسب العدد الذي صورته بالدالتين f و g على الترتيب هي العدد 0.

3 • مثّل بيانيا في معلم متعامد و متجانس مبدأه O كل من الدالتين f و g.

26 الراتب الشهري الكلي لعامل في مؤسسة تجارية مكون من مبلغ ثابت قدرة 10 000 دينارا و علاوات تتمثل في 10% من مبلغ المبيعات الشهرية المحققة.

1 • احسب الراتب الشهري الكلي إذا علمت أن المبيعات قدرت بمبلغ 60 000 دينارا.

2 • ليكن y الراتب الشهري الكلي و x المبيعات الشهرية المحققة لهذا الشهر.

برهن أن $y = 0,1x + 10\,000$

3 • مثّل بيانيا في معلم الدالة f

حيث $f : x \longmapsto 0,1x + 10\,000$

الوحدة : نأخذ 1cm لتمثيل 20 000 دينارا على محور الفواصل و 1cm لتمثيل 5 000 دينارا على محور التراتيب.

• عيّن مبلغ المبيعات عندما يكون الراتب يساوي 18 000 دينار.

• عيّن الراتب الشهري من أجل مبلغ المبيعات قدره 110 000 دينار.

27 عيّن الدالة التآلفية f بحيث $f(5) = -\frac{11}{7}$ و تمثيلها البياني (d) يشمل النقطة A (7 ; -1).

28 f و g دالتان تآلفيتان معرفتان كما يلي :

$f(x) = 2x + 2$ و $g(x) = -3x + 1$

1 • في معلم متعامد و متجانس، ارسم التمثيلين البيانيين (d) و (d′) للدالتين f و g على الترتيب.

2 • حل المعادلة $2x + 2 = -3x + 1$

• ماذا يمثل هذا الحل بالنسبة إلى المستقيمين (d) و (d′) ؟

8 الإحصاء

1 ـ المؤشرات الإحصائية : التكرار ـ التواتر
2 ـ مؤشرات الموقع : الوسط ـ الوسيط

يقابل كل عدد أولي الحرف P.
منذ القرون القديمة، اهتم الرياضياتيون بالبحث عن الأعداد الأولية (أي الأعداد الطبيعية ذات قاسمين : 1 و العدد نفسه).

الجدول التالي يقترح الأعداد الطبيعية الأولية الأصغر أو تساوي 100.

1	21	41	61 P	81
2 P	22	42	62	82
3 P	23 P	43 P	63	83 P
4	24	44	64	84
5 P	25	45	65	85
6	26	46	66	86
7 P	27	47 P	67 P	87
8	28	48	68	88
9	29 P	49	69	89 P
10	30	50	70	90
11 P	31 P	51	71 P	91 P
12	32	52	72	92
13 P	33	53 P	73 P	93
14	34	54	74	94
15	35	55	75	95
16	36	56	76	96
17 P	37 P	57	77 P	97 P
18	38	58	78	98
19 P	39	59 P	79 P	99
20	40	60	80	100

الكفاءات المستهدفة
(التي يجب اكتسابها)

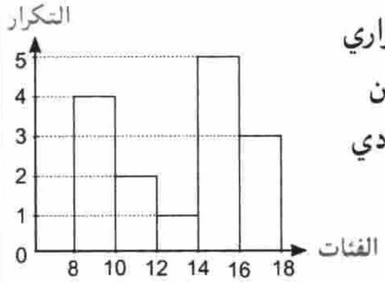
- حساب تكرارات مجمعة و تواترات مجمعة.

- تعيين الوسط و الوسيط لسلسلة إحصائية و ترجمتهما.

- استعمال الجدولات لمعالجة معطيات إحصائية و تمثيلها.

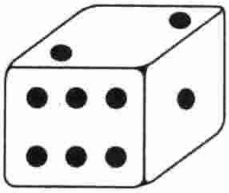
استبيان متعدد الإجابات

اختر الإجابة الصحيحة.

السؤال	الإجابة 1	الإجابة 2	الإجابة 3
1 • التكرار الكلي لسلسلة إحصائية هو ...	مجموع تكرارات قيم السلسلة	أكبر تكرار في قيم السلسلة	عدد قيم السلسلة
2 • تكرار قيم من سلسلة إحصائية هو ...	عدد المرات التي تظهر فيها هذه القيمة	أكبر قيمة في السلسة	عدد قيم السلسلة
3 • التكرار النسبي لقيمة من سلسلة إحصائية هو ...	حاصل قسمة تكرار هذه القيمة على التكرار الكلي	تكرار هذه القيمة	التكرار الكلي للسلسلة
4 • التكرار النسبي من سلسلة إحصائية هو عدد ...	أكبر من 1	محصور بين 0 و 1	أصغر من 0
5 • مجموعة التكرارات النسبية لقيم السلسلة الإحصائية يساوي ...	0	10	1
6 • فئة لسلسلة إحصائية هي ...	مجموعة من قيم هذه السلسلة	قيمة من السلسلة الإحصائية	التكرار النسبي لقيمة من السلسلة الإحصائية
7 • مركز فئة من سلسلة إحصائية هو ...	نصف مجموع طرفي هذه الفئة	تكرار هذه الفئة	التكرار النسبي لهذه الفئة
8 • الوسط المتوازن للقيم 3 ؛ 4 ؛ 5 ؛ 6 ؛ 7 ؛ 8 ؛ 9 يساوي ...	3	6	9
9 • المدرج التكراري التالي يعطي سن المنخرطين في نادي ثقافي.  • عدد المنخرطين هو .... • الفئة ذات أكبر تكرار هي	18 [8 ; 10[	5 [16 ; 18[	70 [14 ; 16[

أنشطة تحضيرية

النشاط 1 - التكرارات



في تجربة رمي زهر نرد 50 مرة تم الحصول على النتائج التالية :

1 ؛ 2 ؛ 2 ؛ 2 ؛ 3 ؛ 1 ؛ 5 ؛ 6 ؛ 6 ؛ 5 ؛ 5 ؛ 5 ؛ 4 ؛ 4 ؛ 4 ؛ 4 ؛ 6 ؛ 6 ؛ 1 ؛ 2

3 ؛ 4 ؛ 6 ؛ 5 ؛ 5 ؛ 1 ؛ 1 ؛ 1 ؛ 3 ؛ 2 ؛ 2 ؛ 3 ؛ 4 ؛ 6 ؛ 5 ؛ 5 ؛ 6 ؛ 1 ؛ 2 ؛ 1

4 ؛ 4 ؛ 3 ؛ 6 ؛ 6 ؛ 1 ؛ 2 ؛ 6 ؛ 5 ؛ 4.

1 • ما هو عدد مرات ظهور الرقم 1 (أي تكرار الرقم 1) ؟

2 • أكمل الجدول التالي :

الرقم	1	2	3	4	5	6
التكرار	9	8	٢	9	9	٨6

3 • أرسم المخطط بالأعمدة لهذه السلسلة الإحصائية ممثلا في محور الفواصل الأرقام و في محور التراتيب التكرارات المناسبة.

النشاط 2 - التواترات - التمثيلات البيانية

تم تسجيل درجات الحرارة (بالدرجة سلسيوس) في نفس المكان و في منتصف النهار خلال 30 يوما متتابعة من نفس الشهر من فصل الشتاء و أفرزت على النتائج التالية :

15 ؛ 13 ؛ 12 ؛ 8 ؛ 8 ؛ 8 ؛ 10 ؛ 15 ؛ 16 ؛ 18 ؛ 12 ؛ 12 ؛ 13 ؛ 11 ؛ 14 ؛ 12 ؛ 12 ؛ 17 ؛ 17 ؛ 6

6 ؛ 8 ؛ 9 ؛ 9 ؛ 9 ؛ 14 ؛ 14 ؛ 15 ؛ 15 ؛ 6.

1 • ما هو التكرار الكلي لهذه السلسلة ؟

2 • عين تكرار كل قيمة و أكمل الجدول التالي :

القيمة	6	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
التكرار												

3 • تذكر أن التكرار النسبي لقيمة من السلسلة الإحصائية هو حاصل قسمة تكرار هذه القيمة على التكرار الكلي للسلسلة.

• احسب التكرارات النسبية لقيم السلسلة السابقة و سجل النتائج في الجدول التالي :

القيمة	6	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
التكرار												
التكرار النسبي												

• ماذا تستنتجه بالنسبة إلى مجموع التكرارات ؟

• ماذا تستنتجه أيضا بالنسبة إلى مجموع التكرارات النسبية ؟

4 • انجز المخطط بالأعمدة للتكرارات النسبية.

5 • نظّم قيم السلسلة في فئات طول كل واحدة منها هو 3.

6 • انجز المدرج التكراري للسلسلة بتمثيل الفئات على المحور الأفقي و تكراراتها على المحور العمودي.

7 • احسب معدل درجات الحرارة خلال هذا الشهر.

معارف

1 - المؤشرات الإحصائية : التكرار - التواتر

1 • أ) التكرار

تعريف نسمي تكرار قيمة ميزة إحصائية، عدد المرات التي تظهر فيه هذه القيمة في السلسلة الإحصائية.

مثال في سلسلة العلامات التالية :

1 ؛ 1 ؛ 3 ؛ 2 ؛ 4 ؛ 1 ؛ 2 ؛ 5 ؛ 1 ؛ 2 ؛ 2 ؛ 2 ؛ 1 ؛ 5 ؛ 5 ؛ 4 ؛ 3 ؛ 3 ؛ 3 ؛ 3.

- تكرار القيمة 3 هو 5.
- تكرار القيمة 4 هو 2.

ملاحظة التكرار الكلي لسلسلة إحصائية هو مجموع تكرارات قيم هذه السلسلة (أي هو عدد قيم السلسلة).
في السلسلة السابقة التكرار الكلي هو 20.

1 • ب) التواتر

تعريف نسمي تواتر قيمة ميزة إحصائية، حاصل قسمة تكرار هذه القيمة على التكرار الكلي للسلسلة الإحصائية.

مثال في السلسلة السابقة، تواتر القيمة 3 هو $\frac{5}{20}$ أي $\frac{1}{4}$ و تواتر القيمة 4 هو $\frac{2}{20}$ أي $\frac{1}{10}$.

ملاحظات
- تواتر قيمة هو دائما عدد محصور بين 0 و 1.
- يمكن التعبير عن تواتر قيم سلسلة إحصائية على شكل نسب مئوية.
- مجموع تواترات قيم سلسلة إحصائية يساوي 1.

هذا المجموع يساوي 100% إذا كانت التواترات معبر عنها بنسب مئوية.

مثال جدول تكرارات و تواترات قيم السلسلة العلامات السابقة يكون كالآتي :

المجموع	5	4	3	2	1	القيم
20	3	2	5	5	5	التكرارات
1	$\frac{3}{20}$	$\frac{2}{20}$	$\frac{5}{20}$	$\frac{5}{20}$	$\frac{5}{20}$	التواترات
100%	15%	10%	25%	25%	25%	التواترات (%)

2 • أ) التكرار المجمع

قيم السلسلة الإحصائية مرتبة ترتيبا تصاعديا.

تعريف التكرار المجمع الصاعد لقيمة هو مجموع تكرار هذه القيمة و تكرارات القيم الأصغر منها.

تعريف التكرار المجمع النازل لقيمة هو مجموع تكرار هذه القيمة و تكرارات القيم الأكبر منها.

ملاحظة نعرف بنفس الكيفية التكرار المجمع الصاعد و التكرار المجمع النازل لفئة.

أمثلة
- في المثال السابق التكرار المجمع الصاعد للقيمة 3 هو 15. (هو مجموع تكرارات القيم 1 ، 2، 3).
- التكرار المجمع الصاعد للقيمة 4 هو 17. (هو مجموع تكرارات القيم 1، 2، 3، 4).
- التكرار المجمع النازل للقيمة 4 هو 5. (هو مجموع تكراري القيمتين 5 و 4).
- التكرار المجمع النازل للقيمة 3 هو 10. (هو مجموع تكرارات القيم 5، 4، 3).

2 • ب) التواتر المجمع

قيم السلسلة الإحصائية مرتبة ترتيبا تصاعديا.

تعريف التواتر المجمع الصاعد لقيمة هو مجموع تواتر هذه القيمة و تواترات القيم الأصغر منها.

تعريف التواتر المجمع النازل لقيمة هو مجمموع تواتر هذه القيمة و تواترات القيم الأكبر منها.

ملاحظة نعرف بنفس الكيفية التواتر المجمع الصاعد لفئة و التواتر المجمع النازل لفئة.

أمثلة من جدول تواترات القيم المنجز سابقا، ينتج جدول التواترات المجمعة الصاعدة و النازلة التالي :

المجموع	5	4	3	2	1	القيم
1	$\frac{3}{20}$	$\frac{2}{20}$	$\frac{5}{20}$	$\frac{5}{20}$	$\frac{5}{20}$	التواترات
	$\frac{20}{20}$	$\frac{17}{20}$	$\frac{15}{20}$	$\frac{10}{20}$	$\frac{5}{20}$	التواترات المجمعة الصاعدة
	$\frac{3}{20}$	$\frac{5}{20}$	$\frac{10}{20}$	$\frac{15}{20}$	$\frac{20}{20}$	التواترات المجمعة النازلة

2 - مؤشرات الموقع : الوسط - الوسيط

نعتبر السلسلة الإحصائية التالية x_1، x_2 ....، x_N حيث N هو التكرار الكلي للسلسلة.

2 • أ) الوسط

تعريف

وسط السلسلة الإحصائية الذي نرمز إليه بالرمز $\bar{x}$ ، هو حاصل قسمة مجموع قيم السلسلة الإحصائية على التكرار الكلي للسلسلة (أي : $\bar{x} = \dfrac{x_1 + x_2 + ... + x_N}{N}$).

ملاحظات

1 • إذا كانت قيم السلسلة x_1، x_2 ....، x_k مرفقة بتكرارات n_1، n_2 ....، n_k على الترتيب فإن $\bar{x}$ ، وسط السلسلة يحسب كالآتي : $\bar{x} = \dfrac{n_1 \times x_1 + n_2 \times x_2 .... + n_k \times x_k}{n_1 + n_2 .... + n_k}$

حيث المجموع $n_1 + n_2 .... + n_k$ هو التكرار الكلي للسلسلة الإحصائية.

2 • إذا كانت السلسلة الإحصائية مستمرة، أي معطاة على شكل فئات، فتؤخذ مراكز الفئات كقيم للسلسلة الإحصائية.

أمثلة

1 • في السلسلة الإحصائية التالية :

الرقم	1	2	3	4	5
التكرار	5	5	5	2	3

لدينا وسط هذه السلسلة هو $\bar{x}$ بحيث

$$\bar{x} = \frac{1\times5 + 2\times5 + 3\times5 + 4\times2 + 5\times3}{5+5+5+2+3}$$

$$= \frac{5 + 10 + 15 + 8 + 15}{20} = \frac{53}{20} = 2{,}65$$

إذن $\bar{x} = 2{,}65$.

2 • في السلسلة التالية :

الفئات	[0 ; 5[	[5 ; 10[	[10 ; 15[	[15 ; 20[
مراكز الفئات	2,5	7,5	12,5	17,5
التكرارات	1	3	8	7

لدينا وسط هذه السلسلة هو $\bar{x}$ بحيث

$$\bar{x} = \frac{2{,}5\times1 + 7{,}5\times3 + 12{,}5\times8 + 17{,}5\times7}{19}$$

$$= \frac{247{,}5}{19} \approx 13{,}02$$

إذن $\bar{x} \approx 13{,}02$ و هو مدور العدد $\dfrac{247{,}5}{19}$ إلى $\dfrac{1}{100}$.

2 . ب) الوسيط

السلسلة الإحصائية مرتبة ترتيبا تصاعديا.

تعريف وسيط السلسلة الإحصائية هو قيمة الميزة الإحصائية التي تجزئ السلسلة إلى جزئين بنفس التكرار.

إذا كان التكرار الكلي للسلسلة فرديا فإن وسيط هذه السلسلة هو القيمة المركزية .
إذا كان التكرار الكلي للسلسلة زوجيا فإن وسيط هذه السلسلة هو وسط القيمتين المركزتين.

أمثلة

1 . في السلسلة الإحصائية التالية : 1 ؛ 1 ؛ 1 ؛ 3 ؛ $\boxed{3}$ ؛ 3 ؛ 4 ؛ 5 ؛ 5

4 قيم 4 قيم

القيمة المركزية هي 3
و مرتبتها هي 1 + 4

لدينا التكرار الكلي لهذه السلسلة هو 9.
1 + (4×2) = 9 إذن العدد 9 فردي .
ينتج أن وسيط هذه السلسلة هو القيمة ذات المرتبة (1 + 4) أي المرتبة 5.
إذن وسيط هذه السلسلة هو 3.

2 . في السلسلة الإحصائية التالية : 1 ؛ 1 ؛ 2 ؛ 3 ؛ $\boxed{3}$ ؛ $\boxed{4}$ ؛ 4 ؛ 5 ؛ 5 ؛ 6

5 قيم 5 قيم

القيمتان المركزيتان هما 3 و 4
و مرتبتهما هما 5 و (1 + 5)

لدينا التكرار الكلي لهذه السلسلة هو 10.
4×2 = 8 إذن العدد 8 زوجي.
إذن وسيط هذه السلسلة هو وسط القيمتين المركزيتين 3 و 4 أي $3,5 = \frac{7}{2} = \frac{3+4}{2}$
و بالتالي وسيط هذه السلسلة هو 3,5.

ملاحظات

1 . وسيط سلسلة لا يتغير إذا كانت قيم هذه السلسلة مرتبة تصاعديًا أو تنازليًا.

2 . عندما نحذف أو نضيف قيمة لسلسلة إحصائية فإن وسيطها يتغيّر عموما.

3 . عندما نضيف لسلسلة إحصائية مرتبة، قيمتين، إحداهما أصغر من القيمة المركزية (أو القيمتين المركزيتين) و الأخرى أكبر من القيمة المركزية (أو القيمتين المركزيتين) فإن وسيط السلسلة المحصل عليها هو وسيط السلسلة المعطاة.

طرائق

1 - حساب التكرار المجمع الصاعد (أو النازل) لقيمة (أو لفئة)

طريقة

لحساب التكرار المجمع الصاعد (أو النازل) لقيمة نتبع المراحل التالية :
- نرتب القيم ترتيبا تصاعديا.
- نعين القيمة المستهدفة.
- نحسب مجموع تكرار هذه القمية و تكرارات القيم الأصغر منها (أو الأكبر منها).

إذا كانت السلسلة منظمة في فئات فنعوض القيمة بالفئة.

تمرين 1 إليك علامات 30 تلميذا من قسم السنة الرابعة متوسط، تحصلوا عليها في فرض الرياضيات.

15 ؛ 13 ؛ 7 ؛ 7 ؛ 9 ؛ 7 ؛ 8 ؛ 8 ؛ 9 ؛ 9 ؛ 9 ؛ 14 ؛ 9 ؛ 11 ؛ 10 ؛ 10 ؛ 14 ؛ 16 ؛ 11 ؛ 9

11 ؛ 11 ؛ 13 ؛ 10 ؛ 14 ؛ 14 ؛ 14 ؛ 15 ؛ 15 ؛ 7.

1 . احسب التكرار المجمع الصاعد لكل قيمة.

2 . احسب التكرار المجمع النازل لكل قيمة.

حل
- التكرار الكلي لهذه السلسلة الإحصائية هو 30.
- نرتب قيم هذه السلسلة ترتيبا تصاعديا و نتحصل على السلسلة التالية :

7 ؛ 7 ؛ 7 ؛ 7 ؛ 8 ؛ 8 ؛ 9 ؛ 9 ؛ 9 ؛ 9 ؛ 9 ؛ 9 ؛ 10 ؛ 10 ؛ 10 ؛ 11 ؛ 11 ؛ 11 ؛ 11 ؛ 13

13 ؛ 14 ؛ 14 ؛ 14 ؛ 14 ؛ 14 ؛ 15 ؛ 15 ؛ 15 ؛ 16.

- حساب تكرار كل قيمة و التكرار المجمع الصاعد لكل قيمة :

القيم	7	8	9	10	11	13	14	15	16
التكرارات	4	2	6	3	4	2	5	3	1
التكرارات المجمعة الصاعدة	4	6	12	15	19	21	26	29	30
التكرارات المجمعة النازلة	30	26	24	18	15	11	9	4	1

تمرين 2 إليك علامات 30 تلميذا من قسم السنة الرابعة متوسط، تحصلوا عليها في فرض الرياضيات.

2 ؛ 6 ؛ 7 ؛ 12 ؛ 4 ؛ 3 ؛ 6 ؛ 10 ؛ 10 ؛ 9 ؛ 9 ؛ 14 ؛ 13 ؛ 5 ؛ 5 ؛ 8 ؛ 3 ؛ 14 ؛ 13 ؛ 9

9 ؛ 8 ؛ 10 ؛ 11 ؛ 7 ؛ 10 ؛ 13 ؛ 9 ؛ 12 ؛ 13.

1 . رتّب هذه العلامات في فئات طول كل واحدة منها 3 بحيث تكون الفئة الأولي هي $[0 ; 3[$.

2 . عيّن تكرار كل فئة.

3 . احسب التكرارات المجمعة الصاعدة و التكرارات المجمعة النازلة لكل فئة.

حل • ترتيب العلامات ترتيبا تصاعديا :

2 ؛ 3 ؛ 3 ؛ 4 ؛ 5 ؛ 5 ؛ 6 ؛ 6 ؛ 7 ؛ 7 ؛ 8 ؛ 8 ؛ 9 ؛ 9 ؛ 9 ؛ 9 ؛ 9 ؛ 10 ؛ 10 ؛ 10 ؛ 10

11 ؛ 12 ؛ 12 ؛ 13 ؛ 13 ؛ 13 ؛ 13 ؛ 14 ؛ 14..

تنظيم السلسلة الإحصائية في فئات طول كل واحدة منها 3.

الفئات	[0 ; 3[	[3 ; 6[	[6 ; 9[	[9 ; 12[	[12 ; 15[
التكرارات	1	5	6	10	8
التكرارات المجمعة الصاعدة	1	6	12	22	30
التكرارات المجمعة النازلة	30	29	24	18	8

2 - حساب التواتر المجمع الصاعد (أو النازل) لقيمة (أو لفئة)

طريقة

لحساب التواتر المجمع الصاعد (أو النازل) لقيمة نتبع المراحل التالية :

- نرتب القيم ترتيبا تصاعديا.
- نعين القيمة المستهدفة.
- نحسب مجموع تواتر هذه القمية و تواترات القيم الأصغر منها (أو الأكبر منها).

إذا كانت السلسلة منظمة في فئات فتكون القيم هي مراكز الفئات.

تمرين إليك نتائج استبيان، أجري على مستوى 30 تليمذا من قسم السنة الرابعة متوسط. يتضمن هذا الإستبيان السؤال التالي : ما هو عدد الإخوة في عائلتك ؟

كانت النتائج كما يلي : 1 ؛ 1 ؛ 3 ؛ 3 ؛ 5 ؛ 5 ؛ 5 ؛ 5 ؛ 4 ؛ 4 ؛ 4 ؛ 5 ؛ 1 ؛ 1 ؛ 2 ؛ 2 ؛ 2 ؛ 2

2 ؛ 4 ؛ 3 ؛ 1 ؛ 4 ؛ 5 ؛ 4 ؛ 4 ؛ 2 ؛ 2 ؛ 5 ؛ 3.

- احسب التواترات المجمعة الصاعدة و التواترات المجمعة النازلة لكل قيمة من السلسلة الإحصائية.

حل • نرتب قيم السلسلة الإحصائية ترتيبا تصاعديا و نتحصل على السلسلة التالية :

1 ؛ 1 ؛ 1 ؛ 1 ؛ 1 ؛ 2 ؛ 2 ؛ 2 ؛ 2 ؛ 2 ؛ 2 ؛ 2 ؛ 3 ؛ 3 ؛ 3 ؛ 3 ؛ 4 ؛ 4 ؛ 4 ؛ 4 ؛ 4 ؛ 4 ؛ 4

5 ؛ 5 ؛ 5 ؛ 5 ؛ 5 ؛ 5 ؛ 5.

التكرار الكلي للسلسلة هو 30.

• حساب تكرارات القيم و تواترات القيم ثم التواترات المجمعة الصاعدة و التواترات المجمعة النازلة.

القيم	1	2	3	4	5
التكرارات	5	7	4	7	7
التواترات	$\frac{5}{30}$	$\frac{7}{30}$	$\frac{4}{30}$	$\frac{7}{30}$	$\frac{7}{30}$
التواترات المجمعة الصاعدة	$\frac{5}{30}$	$\frac{12}{30}$	$\frac{16}{30}$	$\frac{23}{30}$	$\frac{30}{30}$
التواترات المجمعة النازلة	$\frac{30}{30}$	$\frac{25}{30}$	$\frac{18}{30}$	$\frac{14}{30}$	$\frac{7}{30}$

3 - تعيين وسط سلسلة إحصائية

طريقة لتعيين وسط سلسلة إحصائية نتبع المراحل التالية :
- نرتب قيم السلسلة الإحصائية.
- نحسب التكرار الكلي و تكرار كل قيمة.
- نطبق دستور وسط سلسلة إحصائية.

إذا كانت السلسلة منظمة في فئات فتكون القيم هي مراكز الفئات.

تمرين 1 السلسلة التالية تمثل علامات تلاميذ قسم السنة الرابعة متوسط في الرياضيات تحصلوا عليها إثر إختبار الفصل الثاني.

12 ؛ 12 ؛ 11 ؛ 10 ؛ 7 ؛ 13 ؛ 10 ؛ 15 ؛ 9 ؛ 8 ؛ 8 ؛ 11 ؛ 10 ؛ 9 ؛ 6 ؛ 12 ؛ 12 ؛ 12 ؛ 10 ؛ 9.

• احسب وسط هذه العلامات.

حل
• ترتيب قيم السلسلة الإحصائية ترتيبا تصاعديا.

6 ؛ 7 ؛ 8 ؛ 8 ؛ 9 ؛ 9 ؛ 9 ؛ 10 ؛ 10 ؛ 10 ؛ 10 ؛ 11 ؛ 11 ؛ 12 ؛ 12 ؛ 12 ؛ 12 ؛ 12 ؛ 13 ؛ 15.

• حساب التكرارات : التكرار الكلي هو 20.

العلامات	6	7	8	9	10	11	12	13	15
التكرارات	1	1	2	3	4	2	5	1	1

• حساب وسط السلسلة.

$$\bar{x} = \frac{6\times1 + 7\times1 + 8\times2 + 9\times3 + 10\times4 + 11\times2 + 12\times5 + 13\times1 + 15\times1}{20} = \frac{53}{20} = 10,6$$

إذن $\bar{x} = 10,6$

تمرين 2 الجدول التالي يعطي توزيع تلاميذ السنة الرابعة متوسط حسب قاماتهم.

القامات (cm)	[150 ; 155[	[155 ; 160[	[160 ; 165[	[165 ; 170[
التكرارات	6	4	18	7

• احسب وسط هذه السلسلة.

حل
- الفئات مرتبة ترتيبا تصاعديا.
- التكرار الكلي هو 35.
- نعين مراكز الفئات و نتحصل على الجدول التالي :

القامات (m)	[150 ; 155[	[155 ; 160[	[160 ; 165[	[165 ; 170[
مراكز الفئات	152,5	157,5	162,5	167,5
التكرارات	6	4	18	7

- نحسب الوسط $\bar{x}$

لدينا :

$$\bar{x} = \frac{152{,}5\times6 + 157{,}5\times4 + 162{,}5\times18 + 167{,}5\times7}{35} = \frac{5642{,}5}{35} \approx 161{,}2$$

إذن وسط قامات التلاميذ هو 161,2 cm.

4 - تعيين وسيط سلسلة إحصائية

طريقة

لتعيين وسيط سلسلة إحصائية نتبع المراحل التالية :
- نرتب السلسلة تصاعديا أو تنازليا.
- نحسب تكرارها الكلي N.
- إذا كان N فرديا (يكتب $N = 2p + 1$) فإن وسيط السلسلة هو القيمة المركزية (وهي القيمة ذات المرتبة $p + 1$).
- إذا كان N زوجيا (يكتب $N = 2p$) فإن وسيط السلسلة هو وسط القيمتين المركزيتين (أي وسط القيمتين ذات المرتبتين p و $p + 1$).

تمرين
سجل رضا أوزان (بالكيلوغرامات) لـ 11 صديق له في القسم و تحصل على السلسلة الإحصائية التالية :
53 ; 48 ; 49 ; 50 ; 50 ; 54 ; 56 ; 60 ; 57 ; 48 ; 50.

1 - ما هو وسيط هذه السلسلة ؟

2 - بنزع القيمة 50 من السلسلة، احسب وسط السلسلة الجديدة.

حل
- ترتيب قيم السلسلة تصاعديا.

48 ; 48 ; 49 ; 50 ; 50 ; 50 ; 53 ; 54 ; 56 ; 57 ; 60.

1 - التكرار الكلي لهذه السلسلة هو 11.

العدد 11 فردي أي $11 = 2\times5 + 1$

إذن وسيط هذه السلسلة هي القيمة ذات المرتبة 1 + 5 أي 6 و هي القيمة 50.

ينتج أن وسيط السلسلة الإحصائية هو 50.

2 - السلسلة الجديدة ذات 10 قيم، وسيطها هو العدد $\frac{50 + 53}{2}$ أي 51,5.

تمرين محلول

تمرين سجلت جمعية لمستهلكين الثمن بالدينار لنفس البضاعة في عدة نقط البيع و كانت النتائج ملخصة في الجدول التالي :

الثمن (بالدينار)	18	19	20	21	22	23	24	25
التكرارات	6	4	10	13	9	11	3	5

1 • في كم دكان يبلغ ثمن البضاعة 23 دينارا ؟

2 • أنجز جدول التكرارات المجمعة الصاعدة و التكرارات المجمعة النازلة.

3 • احسب وسط هذه السلسلة.

4 • احسب وسيط هذه السلسلة.

5 • استنتج الثمن المتوسط لهذه البضاعة و الثمن الوسيطي لها.

حل 1 • يبلغ ثمن البضاعة 23 دينارا في 11 نقطة بيع (و هو تكرار القيمة 23).

2 • جدول التكرارات المجمعة الصاعدة و التكرارات المجمعة النازلة.

الثمن (بالدينار)	18	19	20	21	22	23	24	25	المجموع
التكرارات	6	4	10	13	9	11	3	5	61
التكرارات المجمعة الصاعدة	6	10	20	33	42	53	56	61	
التكرارات المجمعة النازلة	61	55	51	41	28	19	8	5	

3 • حساب الوسط $\bar{x}$ للسلسلة.

لدينا
$$\bar{x} = \frac{18\times6 + 19\times4 + 20\times10 + 21\times13 + 22\times9 + 23\times11 + 24\times3 + 25\times5}{61}$$
$$= \frac{108 + 76 + 200 + 273 + 198 + 253 + 72 + 125}{61} = \frac{1305}{61} \approx 21{,}39$$

إذن $\bar{x} \approx 21{,}39$

4 • حساب وسيط السلسلة. لدينا : عدد القيم هو 61.

$61 = 2\times30 + 1$ إذن وسيط السلسلة هو الثمن الذي مرتبته هي 31. أي وسيط السلسلة هو 21.

5 • الثمن المتوسط للسلسلة هو 21,39 دينارا.

الثمن الوسيطي هو 21 دينارا و هو وسيط سلسلة الأثمان.

تمارين و مسائل

صحيح أو خاطئ

1 1 • التكرار الكلي لسلسلة إحصائية هو عدد قيم هذه السلسلة.

2 • تكرار قيمة لسلسلة إحصائية هو عدد القيم الأصغر منها.

3 • مجموع تكرارات قيم سلسلة إحصائية هو التكرار الكلي للسلسلة.

4 • تواتر قيمة هو تكرار هذه القيمة.

5 • مجموع تواترات قيم سلسلة إحصائية يساوي التكرار الكلي للسلسلة.

6 • التكرار المجمع الصاعد لقيمة هو مجموع تكرار هذه القيمة و تكرارات القيم الأكبر منها.

7 • التكرار المجمع النازل لقيمة هو مجموع تكرار هذه القيمة و تكرارات القيم الأصغر منها.

8 • وسط السلسلة 3 ؛ 4 ؛ 5 ؛ 6 ؛ 7 هو 5.

9 • وسط السلسلة 2 ؛ 4 ؛ 5 ؛ 6 ؛ 7 هو 5.

10 • وسيط السلسلة 4 ؛ 5 ؛ 6 ؛ 7 ؛ 8 هو 6.

11 • وسيط السلسلة 3 ؛ 4 ؛ 5 ؛ 6 ؛ 7 ؛ 8 هو 5,5.

تمارين

التكرارات - التكرارات المجمعة

2 • أنجزت عملية إحصاء حول العدد x للأطفال في عدد من العائلات. أسفرت العملية على النتائج التالية :

التكرارات	قيمة x
85	0
120	1
230	2
170	3
95	4
185	5
48	6
24	7
16	8

1 • ما هو التكرار الكلي لهذه السلسلة ؟

2 • احسب التكرارات المجمعة الصاعدة لقيم هذه السلسلة.

3 • كم عائلة لها أكثر من 5 أطفال ؟

3 الجدول التالي يتضمن توزيع نقط علامات تلميذ من قسم السنة الرابعة متوسط في فرض الرياضيات.

هذه العلامات موزعة في فئات متساوية المدى.

التكرارات	الفئات
1	[0 ; 2[
1	[2 ; 4[
3	[4 ; 6[
2	[6 ; 8[
5	[8 ; 10[
7	[20 ; 12[
8	[12 ; 14[
4	[14 ; 16[
2	[16 ; 18[

• احسب التكرارات المجمعة الصاعدة.

• ارسم المدرج التكراري لهذه السلسلة.

التواترات - التواترات المجمعة

4 طرح السؤال التالي على 20 تلميذا.

« أعط عددا يتراوح من 1 إلى 10 ». فكانت الإجابات كما يلي : 2 ؛ 2 ؛ 2 ؛ 3 ؛ 4 ؛ 4 ؛ 4 ؛ 5 ؛ 5 ؛ 7 ؛ 7 ؛ 7 ؛ 8 ؛ 9 ؛ 9 ؛ 9 ؛ 9 ؛ 10 ؛ 10 ؛ 10.

• أكمل الجدول التالي :

القيمة	1	2	3	4	5
التكرار					

القيمة	6	7	8	9	10
التكرار					

• احسب تواتر كل قيمة.

• احسب التواترات المجمعة الصاعدة لقيم هذه السلسلة.

5 رمى رضا زهر النرد 45 مرة.

(أوجه زهر النرد مرقمة من 1 إلى 6).

و سجّل النتائج التالية :

1 ؛ 1 ؛ 1 ؛ 3 ؛ 2 ؛ 1 ؛ 5 ؛ 5 ؛ 4 ؛ 4 ؛ 3 ؛ 3 ؛ 2

4 ؛ 4 ؛ 6 ؛ 6 ؛ 6 ؛ 1 ؛ 1 ؛ 6 ؛ 2 ؛ 4 ؛ 3 ؛ 3 ؛ 4

5 ؛ 1 ؛ 6 ؛ 6 ؛ 6 ؛ 4 ؛ 4 ؛ 5 ؛ 6 ؛ 5 ؛ 5 ؛ 2 ؛ 2

3 ؛ 3 ؛ 4 ؛ 2 ؛ 6 ؛ 6.

• اكمل الجدول التالي :

الرقم	1	2	3	4	5	6
التكرار						
التكرار المجمع الصاعد						
التواتر						
التواتر المجمع الصاعد						

• أنجز المخطط بالأعمدة لهذه السلسلة.

6 الجدول التالي يبين توزيع 37 شخصا حسب قاماتهم (بالأمتار).

التكرار	القامة (بالأمتار)
6	[1,50 ; 1,60[
4	[1,60 ; 1,70[
18	[1,70 ; 1,80[
7	[1,80 ; 1,90[
2	[1,90 ; 2,00[

• احسب تواتر كل فئة.

• احسب التواترات المجمعة الصاعدة.

• أنجز المدرج التكراري لهذه السلسلة.

وسط سلسلة إحصائية

7 هذه علامات تحصل عليها رضا خلال الفصل الثاني في الرياضيات.

11 ؛ 9 ؛ 13 ؛ 12 ؛ 12 ؛ 15 ؛ 17 ؛ 10.

• احسب معدل رضا. أعط النتيجة بتقريب 0,1 بالزيادة.

8 سجلت ليلى علامات تلاميذ قسمها في فرض الفيزياء و الكيمياء و نظمتها في الجدول التالي :

العلامة (على 20)	6	8	10	11	12	13	14
التكرار	3	2	8	6	10	2	3

• احسب معدل القسم.

• إذا تحصلت ليلى على العلامة 11، ماهو موقعها بالنسبة إلى معدل القسم ؟

9 الجدول التالي يعطي فئات علامات تلاميذ و تكراراتها من قسم السنة الرابعة متوسط في فرض الرياضيات.

التكرار	فئات العلامات
1	[0 ; 3[
3	[3 ; 6[
2	[6 ; 9[
9	[9 ; 12[
9	[12 ; 15[
3	[15 ; 18[

• احسب وسط العلامات.

10 إليك علامات رضا في فروض التاريخ.

بقي فرض واحد في نهاية الفصل.

12 ؛ 7 ؛ 9 ؛ 14 ؛ 11 ؛ 13 ؛ 15.

• ماهي العلامة التي يجب على رضا الحصول عليها في الفرض الأخير حتى يكون معدله هو 12 ؟

11 رمى رضا 11 مرة زهر نرد و كانت النتائج كما يلي : 4 ؛ 3 ؛ 4 ؛ 6 ؛ 5 ؛ 4 ؛ 4 ؛ 3 ؛ 6 ؛ 5 ؛ 4.

إن رضا متأكد أنه، مهما كانت نتيجة الرمية 12، سيكون معدل كل هذه الرميات هو 4.

• هل هو على صواب ؟

12 سجلت القامات (بالسنتيمترات) لتلاميذ قسم السنة الرابعة متوسط و كانت النتائج كما في الجدول التالي :

التكرار	الفئات
4	[140 ; 145[
6	[145 ; 150[
12	[150 ; 155[
7	[155 ; 160[
3	[160 ; 165[
2	[165 ; 170[

• احسب، بتقريب 1 cm، القامة المتوسطة لتلاميذ هذا القيم.

13 اقترح أستاذ الرياضيات فرضا، في قسمين له، من السنة الرابعة متوسط.

في قسم السنة الرابعة A، الذي يشمل 24 تلميذا، كان معدل القسم 10,5 على 20 و في قسم السنة الرابعة B، الذي يشمل 28 تلميذا، كان معدل القسم 12,5.

• ما هو معدل تلاميذ القسمين ؟

وسيط سلسلة إحصائية

14 عيّن وسيط السلسلة الإحصائية التالية :

112 ؛ 108 ؛ 115 ؛ 111 ؛ 107 ؛ 109 ؛ 106 ؛ 110 ؛ 117.

15 إليك السلسلة الإحصائية التالية :

52 ؛ 53 ؛ 55 ؛ 60 ؛ 64 ؛ 68 ؛ 69 ؛ 72 ؛ 75.

• احسب و سيط هذه السلسلة.

• بإضافة قيمة إلى هذه السلسلة، هل يتغير وسيطها ؟ (حاول إضافة وسيط السلسلة ثم قيمة مختلفة عن الوسيط).

16 • عيّن وسيط كل سلسلة من السلاسل الإحصائية التالية :

1• 3,2 ؛ 4,5 ؛ 7,4 ؛ 12 ؛ 13,7.

2• 15 ؛ 7 ؛ 13 ؛ 7 ؛ 19 ؛ 7 ؛ 14.

3• 10 ؛ 15 ؛ 4 ؛ 10 ؛ 5 ؛ 16.

4• 21 ؛ 53 ؛ 17 ؛ 41 ؛ 12 ؛ 27 ؛ 23 ؛ 18.

17 الجدول التالي، يقدم عدد الوجبات التي يوفّرها مطعم المدينة خلال 6 أيام من الأسبوع.

	السبت	الأحد	الإثنين	الثلاثاء	الأربعاء	الخميس
عدد الوجبات	16	41	36	48	62	45

• احسب وسط هذه السلسلة و وسيطها.

18 هذه علامات تحصل عليها ثلاثة تلاميذ (رضا، سمير، عمر).

رضا : 12 ؛ 11 ؛ 9 ؛ 7 ؛ 13.

سمير : 10 ؛ 8 ؛ 8 ؛ 14 ؛ 14.

عمر : 9 ؛ 8 ؛ 13 ؛ 12 ؛ 12.

• احسب معدل كل تلميذ.

• احسب وسيط كل تلميذ.

19 في مسابقة القفز الطويل المنظم في مؤسسة مدرسية، سجل 12 تلميذا النتائج التالية : (الوحدة بالسنتيمتر).

101 ؛ 106 ؛ 106 ؛ 110 ؛ 112 ؛ 212 ؛ 216 ؛ 227 ؛ 257 ؛ 262 ؛ 278 ؛ 282.

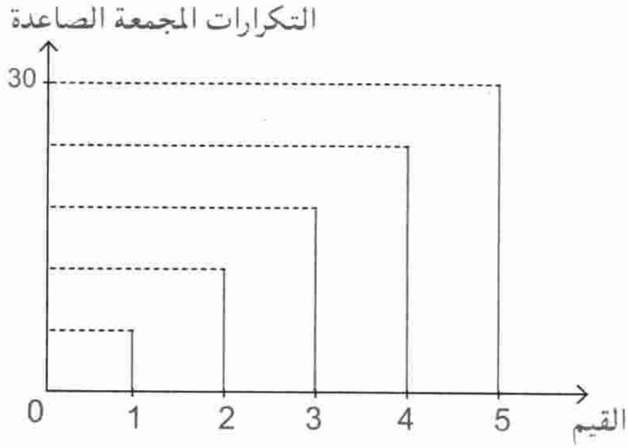
• احسب معدل هذه القفزات.

• احسب وسيط هذه القفزات.

مسائل

20 المخطط التالي يمثل سلسلة إحصائية بالأعمدة للتكرارات المجمعة الصاعدة.

• عيّن وسيط السلسلة.



21 طلب من أساتذة الرياضيات، إقتراح تلميذ من السنة الرابعة متوسط للمشاركة في مسابقة في الرياضيات.
بعد دراسة نتائج التلاميذ، إتفق الأساتذة على الإحتفاظ بثلاثة تلاميذ حيث كانت علاماتهم كالآتي :

رضا	13	19	13,5	14,5	18	14
سمير	14	17	15	15,5	16,5	18
ليلى	13	20	19	18	10	15

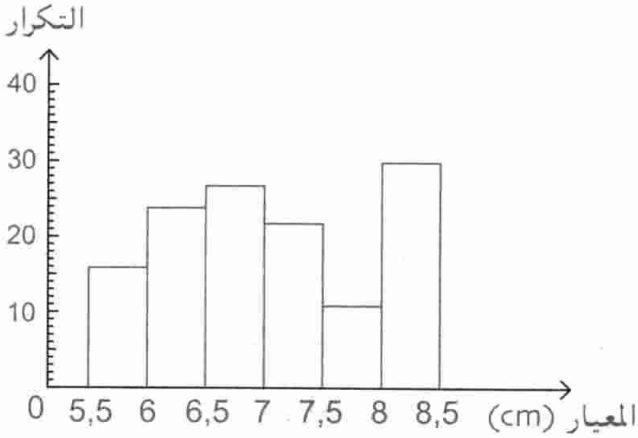
1 • احسب وسط علامات كل تلميذ.
2 • احسب الفرق بين أكبر علامة و أصغر علامة لكل تلميذ.
3 • لقد اختار الأساتذة ليلى لتمثيل الإكمالية. كيف يبرر الأساتذة إختيارهم ؟

22 في سنة 2000، تم تسجيل عددالأولاد الذين عمرهم لا يتعدى 15 سنة في عائلات مدينة معينة.
أسفرت العملية على النتائج التالية :

عدد الأولاد	0	1	2	3	4	5
عدد العائلات	140	345	120	250	400	135

1 • احسب العدد المتوسط للأولاد في هذه العائلات.
2 • ما هي النسبة المئوية للعائلات ذات ثلاثة أولاد أو أكثر ؟
3 • أنجز المخطط بالأعمدة لتمثيل هذه السلسلة الإحصائية ؟

23 قبل بيع تفاح، تقوم شركة بإنتقاء الحبات حسب قطرها.
المدرج التكراري التالي يبين توزيع كمية 130 حبة تفاح حسب معيارها :



1 • إنطلاقا من هذا المدرج التكراري أكمل الجدول التالي :

التكرار	المعيار (cm)
16	[5,5 ; 6[
	[; [
	[; [

التكرار	المعيار (cm)
	[; [
	[; [
	[; [

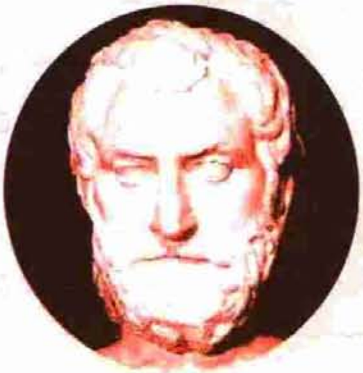
2 • ما هو عدد حبات التفاح ذات معيار 7cm على الأقل؟
3 • احسب النسبة المئوية d لحبات التفاح التي قطرها محصور بين 7cm و 8cm (أي $7 \leq d < 8$).
4 • نريد تمثيل السلسلة الإحصائية بواسطة مخطط دائري.
أكمل الجدول التالي علما أن القيمة الأولى للزاوية تحسب كما يلي : $\frac{16 \times 360}{130} = 44{,}30°$

الزاوية (°)	التكرار	المعيار (cm)
44,30	16	[5,5 ; 6[
		[; [
		[; [
		[; [
		[; [
		[; [
360	130	المجموع

• ارسم المخطط الدائري بأخذ 5 cm كقطر القرص.
• احسب وسط هذه السلسلة.
• إلى أي فئة ينتمي هذا الوسط ؟

خاصية طالس

1 - نظرية طالس
2 - النظرية العكسية لنظرية طالس



طالس (Thalès)

طالس هو رياضياتي من الأغريق، عاش في الفترة 625 - 546 قبل الميلاد.
يبدو أنه أهتم بمقارنة الزوايا في وضعيات مختلفة (زوايا مثلث متساوي الساقين، زاويتان متقابلتان بالرأس،...) إلا أن أهم ما أنجزه هو بعث التفكير العلمي من خلال ربطه المنطقي بين خواص كانت معروفة لكن منعزلة بعضها عن بعض وأعطى لها وجاهة أكثر. فيكون طالس قد ساهم بكثير في وضع أرضية الاستدلال والتفكير العلمي.

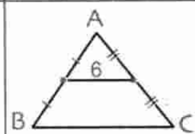
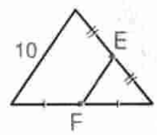
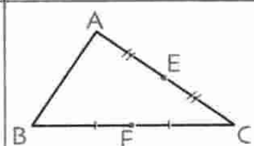
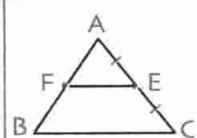
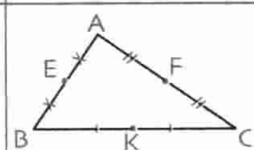
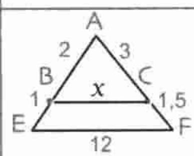
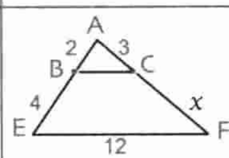
الكفاءات المستهدفة

(التي يجب اكتسابها)

- معرفة خاصية طالس و استعمالها في حساب الأطوال أو إنجاز براهين و إنشاءات هندسية بسيطة.

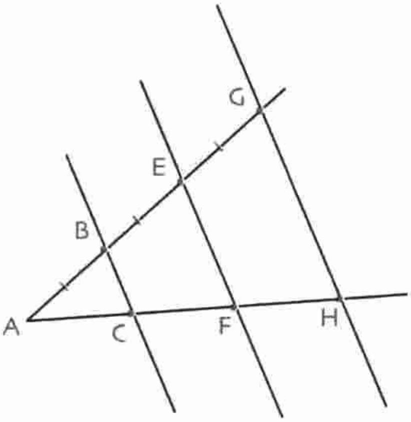
استبيان متعدد الإجابات

اختر الإجابة الصحيحة.

السؤال	الإجابة 1	الإجابة 2	الإجابة 3
1. من الشكل التالي نستنتج أن الطول BC يساوي … 	10 وحدة طول	11 وحدة طول	12 وحدة طول
2. من الشكل التالي نستنتج أن الطول EF يساوي … 	4 وحدة طول	5 وحدة طول	6 وحدة طول
3. من الشكل التالي نستنتج أن … 	$EF = \frac{1}{2} AC$	$EF = \frac{1}{2} BC$	$EF = \frac{1}{2} AB$
4. في المثلث ABC لدينا (BC) يوازي (EF) إذن … 	$BC = \frac{1}{2} EF$	$BC = EF$	F منتصف [AB]
5. في الشكل الموالي، (KF) يوازي (AB) لأن … 	E منتصف الضلع [AB] و F منتصف الضلع [AC]	K منتصف الضلع [BC] و E منتصف الضلع [AB]	K منتصف الضلع [BC] و F منتصف الضلع [AC]
6. من $\frac{4}{8} = \frac{3}{x}$ نستنتج أن …	$x = \frac{8\times3}{4}$	$x = \frac{4\times3}{8}$	$x = \frac{4}{8\times3}$
7. في الشكل الموالي : (BC) يوازي (EF) إذن … 	$x = 8$	$x = 9$	$x = 10$
8. في الشكل الموالي : (BC) يوازي (EF) إذن … 	$x = 5$	$x = 4$	$x = 6$

أنشطة تحضيرية

النشاط 1 - مستقيم المنتصفين في مثلث



إليك الشكل حيث $AB = BE = EG$ و (GH)، (EF) و (BC) مستقيمات متوازية.

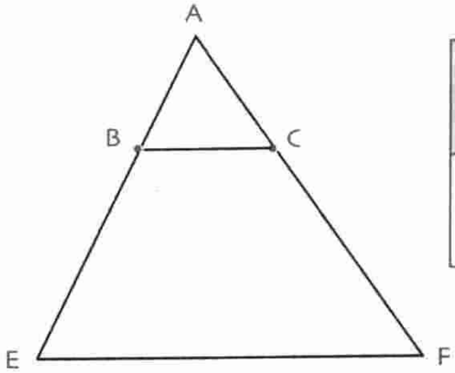
1 • ارسم المستقيم (BH). هذا المستقيم يقطع (EF) في K.

• برهن أن K منتصف [BH] و استنتج أن $AC = CF = FH$.

2 • عبّر عن EF بدلالة BC و عن GH بدلالة EK وعن BC بدلالة KF.

3 • عبّر عن GH بدلالة BC.

النشاط 2



إليك الشكل حيث (BC) يوازي (EF).

1 • أكمل الجدول التالي حتى يكون جدول تناسب بين أطوال أضلاع المثلثين ABC و AFE.

AB	AC	BC
...	...	...

2 • أكمل $\frac{AE}{...} = \frac{AF}{...} = \frac{EF}{...}$

النشاط 3

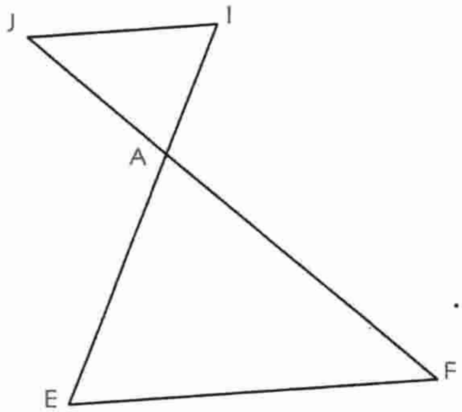
• أعد الشكل السابق. (النشاط 2)

1 • أنشئ النقطة I نظيرة النقطة B بالنسبة إلى A و J نظيرة C بالنسبة إلى A.

• برهن أن (IJ) يوازي (BC) و $IJ = BC$.

أكمّل حينئذ جدول التناسب بين أطوال أضلاع المثلثين AEF و AIJ.

$$\frac{AE}{...} = \frac{AF}{...} = \frac{EF}{...}$$



2 • المثلثان AIJ و AFE في الوضعية المقابلة :

وحدة الطول هي السنتيمتر.

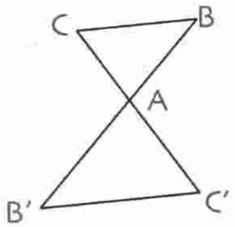
• احسب IJ و AF علما أن $AI = 3$ و $AJ = 4$ و $AE = 6$ و $EF = 9$.

معارف

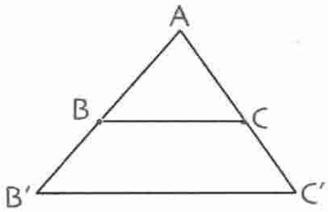
1 - نظرية طالس

نظرية (d) و ('d) هما مستقيمان متقاطعان في النقطة A.
B و 'B هما نقطتان من (d) تختلفان عن A. C و 'C هما نقطتان من ('d) تختلفان عن A.
إذا كان المستقيمان (d) و ('d) متوازيين فإن $\frac{AB'}{AB} = \frac{AC'}{AC} = \frac{B'C'}{BC}$.

ملاحظة المثلثان ABC و 'AB'C معينان بمستقيمين متقاطعين يقطعهما مستقيمان متوازيان. نقول أنهما مثلثان في وضعية طالس.



- (BC) يوازي ('B'C).
- $\widehat{CAB}$ و $\widehat{C'AB'}$ متقابلتان بالرأس.



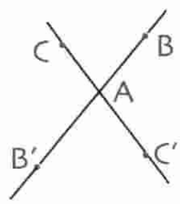
- (BC) يوازي ('B'C)
- $\hat{A}$ زاوية مشتركة.

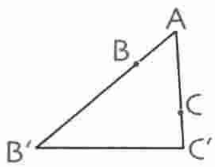
حسب نظرية طالس لدينا $\frac{AB'}{AB} = \frac{AC'}{AC} = \frac{B'C'}{BC}$

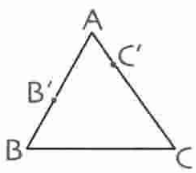
نكتب اسماء المثلثين منظمة كالتالي : $\boxed{\begin{matrix} C' \\ C \end{matrix}}$ $\boxed{\begin{matrix} B' \\ B \end{matrix}}$ $\boxed{\begin{matrix} A \\ A \end{matrix}}$ و ينتج جدول التناسبية الآتي :

AB'	AC'	B'C'
AB	AC	BC

نقول عن النقط A، B، 'B من جهة و عن النقط A، C، 'C من جهة أخرى أنها بنفس الترتيب على مستقيمين في الوضعيات المقابلة :



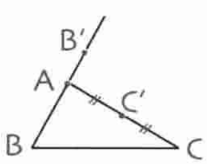




2 - النظرية العكسية لنظرية طالس

نظرية (d) و ('d) هما مستقيمان متقاطعان في النقطة A.
B و 'B هما نقطتان من (d) تختلفان عن A. C و 'C هما نقطتان من ('d) تختلفان عن A.
إذا كان $\frac{AB'}{AB} = \frac{AC'}{AC}$ و كانت النقط A، B، 'B و النقط A، C، 'C مرتبة بنفس الترتيب فإن المستقيمين (d) و ('d) متوازيان.

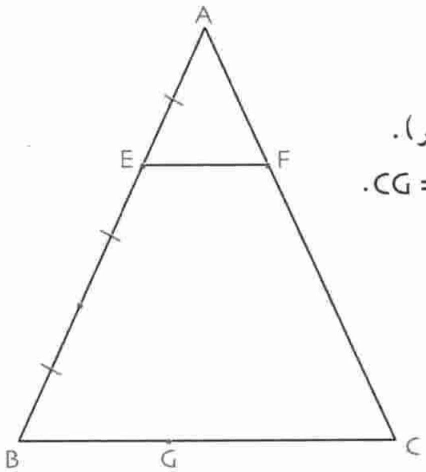
ملاحظة من المهم أن تكون النقط على استقامة واحدة بنفس الترتيب في المثال التالي : $\frac{AB'}{AB} = \frac{AC'}{AC} = \frac{1}{2}$
نلاحظ أن A، B، 'B على استقامة واحدة و النقط A، C، 'C على استقامة واحدة كذلك.
هذه النقط ليست مرتبة بنفس الترتيب. إذن المستقيمان (BC) و ('B'C) ليسا متوازيين.



طرائق

1 - إثبات توازي مستقيمين

طريقة لإثبات توازي مستقيمين، يمكن تطبيق النظرية العكسية لنظرية لطالس.



تمرين لاحظ الشكل المقابل.

(EF) يوازي (BC) و $AB = 3AE$. (وحدة الطول هي السنتيمتر).

تعطى : $AE = 2$ ؛ $BC = 6$ ؛ $EF = 2$ و $AF = 2$ و $CG = 2BG$.

1 • احسب الأطوال AB، AC و BC.

2 • برهّن أن (FG) يوازي (AB).

3 • هل (EG) يوازي (AC) ؟

حل 1 • نعلم أن $AE = 2$ و $AB = 3AE$ إذن $AB = 6$.

نلاحظ أن المثلثين AEF و ABC في وضعية طالس.

نعين إذن جدول تناسبية لأضلاع المثلثين AEF و ABC.

A	E	F
A	B	C

AE	AF	EF
AB	AC	BC

ينتج أن : $\frac{AE}{AB} = \frac{AF}{AC} = \frac{EF}{BC} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

من المساوتين $\frac{AF}{AC} = \frac{1}{3}$ و $AF = 2$ ينتج أن $AC = 3AF$ و بالتالي : $AC = 6$

من المساوتين $\frac{EF}{BC} = \frac{1}{3}$ و $EF = 2$ ينتج أن $BF = 3EF$ و بالتالي : $BC = 6$

$CF = CA - AF = 4$ و $CG = \frac{2}{3}BC$ إذن $CG = 4$

2 • لدينا : $\frac{CF}{CA} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ و $\frac{CG}{CB} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ إذن : $\frac{CF}{CA} = \frac{CG}{CB}$

بما أن النقط C، F، A من (AC) و B، G، C من (BC) مرتبة بنفس الترتيب

فإن (FG) يوازي (AB) (حسب النظرية العكسية لنظرية طالس).

3 • لدينا : $BE = AB - AE$ إذن $BE = 4$. $BG = BC - CG$ أي $BG = 2$

$\frac{BE}{BA} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ و $\frac{BG}{BC} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

و النقط A، E، B من (AB) و C، G، B من (BC) مرتبة بنفس الترتيب.

بما أن $\frac{BE}{BA} \neq \frac{BG}{BC}$ فإن (EG) لا يوازي (AC).

2 -تقسيم قطعة مستقيم

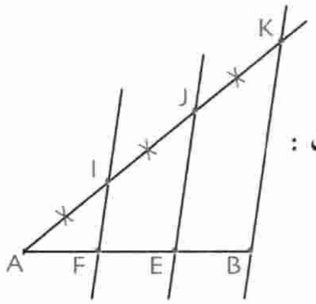
طريقة

لتقسيم قطعة مستقيم يمكن إستعمال نظرية طالس.

تمرين 1 [AB] قطعة مستقيم.

• قسم القطعة [AB] إلى ثلاثة قطع متقايسة. استعمل **فقط** مسطرة غير مدرجة و مدور.

حل



• نرسم القطعة [AB].

• نرسم نصف مستقيم يشمل A.

• نمثل على نصف المستقيم النقط I ، J ، K بهذا الترتيب بدءا من A حيث :
$AI = IJ = JK$.

• نرسم المستقيم (KB) ثم المستقيمات الموازية له و التي تشمل J و I.

يقطع هذان المستقيمان المستقيم (AB) في E و F على الترتيب.

لدينا : I منتصف [AJ] إذن F منتصف [AE] (مستقيم المنتصفين).

بتطبيق نظرية طالس ينتج أن : $\frac{AF}{AB} = \frac{AI}{AK} = \frac{1}{3}$ و $\frac{AJ}{AK} = \frac{AE}{AB} = \frac{2}{3}$

و بالتالي $AB = 3AF$ و $AF = FE$ ؛ $AE = \frac{2}{3}AB$ و $EB = AB - AE = \frac{1}{3}AB$

إذن $AF = FE = EB$.

تمرين 2 [AB] قطعة مستقيم.

• ضع نقطة M على القطعة [AB] أو من حاملها وخارج [AB] حيث $\frac{MA}{MB} = \frac{3}{2}$

(إستعمل المسطرة غير المدرجة و المدور).

حل

• نرسم مستقيمين (Δ_1) و (Δ_2) متوازين و يشملان A و B على الترتيب و مدرجين بتدريج منتظم بنفس الوحدة.

للحصول على وضعة طالس يكفي تعيين نقطة E على (Δ_2) بحيث $BE = 2$

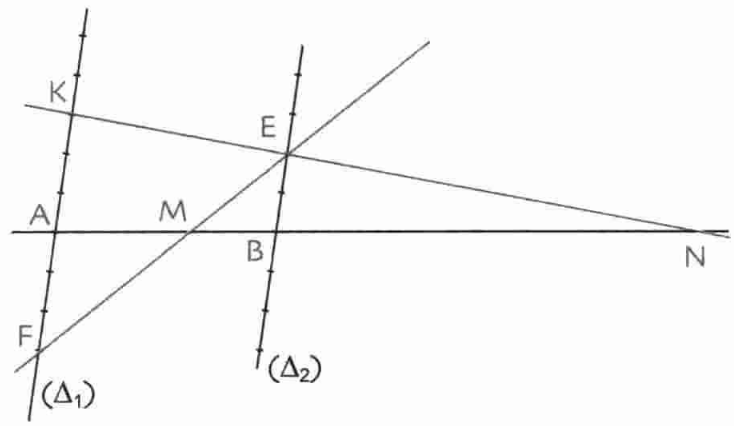
و نقطتين K و F على (Δ_1) بحيث $AK = AF = 3$.

لدينا : (EF) يقطع (AB) في M و (KE) يقطع (AB) في N. بتطبيق خاصية طالس ينتج أن :

$\frac{NA}{NB} = \frac{3}{2}$ و $\frac{MA}{MB} = \frac{3}{2}$

و بالتالي M نقطة من [AB] و N نقطة خارجها.

و هما النقطتان اللتان تقسمان القطعة [AB] في النسبة $\frac{3}{2}$.



ملاحظة • في كل من الحالتين السابقتين، M و N قريبتان من B أكثر من A مع N خارج [AB] و من جهة B لأن $1 < \frac{3}{2}$.
• إذا كانت النسبة أصغر من 1، نتبع نفس المراحل و تكون النقطتان M و N قريبة من A أكثر من B.
N خارج [AB] من جهة A.
• إذا كانت النسبة تساوي 1 فإنه توجد نقطة وحيدة M و هي منتصف [AB].

3 - إنشاء قطعة مستقيم طولها رابع متناسب

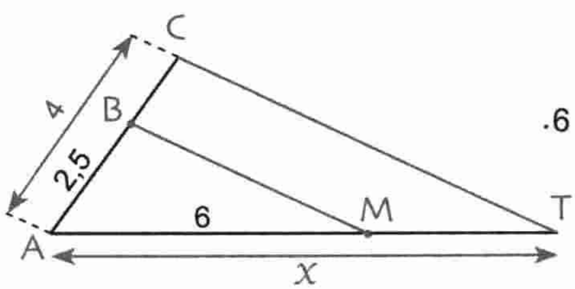
طريقة **لإنشاء قطعة مستقيم يكون طولها رابع متناسب لثلاثة أعداد موجبة يمكن إستعمال نظرية طالس.**

تمرين وحدة الطول هي السنتيمتر.
[AB]، [AC] و [AM] ثلاث قطع أطوالها p، q، r على الترتيب بحيث $p = 2{,}5$ ، $q = 4$ و $r = 6$.
• احسب AT.
• أنشئ قطعة طولها x حيث $px = qr$ ثم تحقق بالحساب وبالقياس.

حل لدينا $px = qr$ يعني $\frac{p}{q} = \frac{r}{x}$ (أي $\frac{AB}{AC} = \frac{AM}{x}$)

التناسب $\frac{p}{q} = \frac{r}{x}$ يكتب على الشكل $\frac{2{,}5}{4} = \frac{6}{x}$

• نلاحظ أن x هو الرابع المتناسب للأعداد 2,5 ؛ 4 و 6.
نرسم مثلثين في وضعية طالس (الشكل).

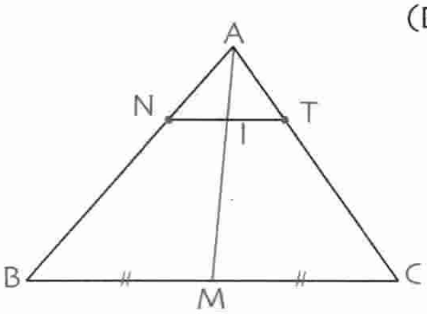


لدينا (CT) يوازي (BM) و ينتج أن $x = AT$.
باستعمال الحساب، يكفي حل المعادلة $2{,}5x = 4 \times 6$
حل هذه المعادلة هو العدد 9,6.
للتحقق باستعمال القياس، يكفي إنجاز قياس هذه القطعة بمسطرة مدرجة و الحصول على قيمة مقربة للطول x.

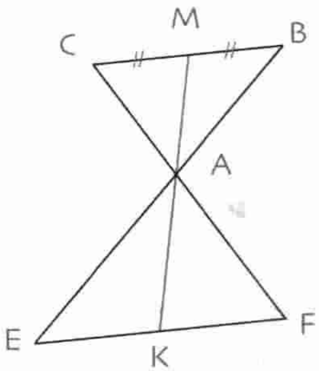
تمرين محلول

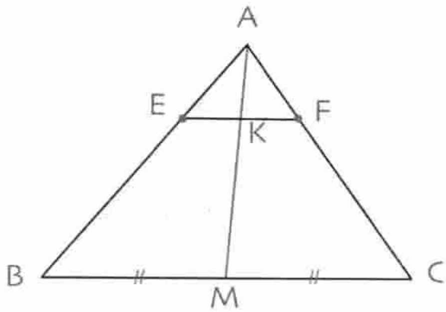
تمرين ABC و AFE مثلثان في وضعية طالس حيث E ، B ، A نقط من نفس المستقيم.

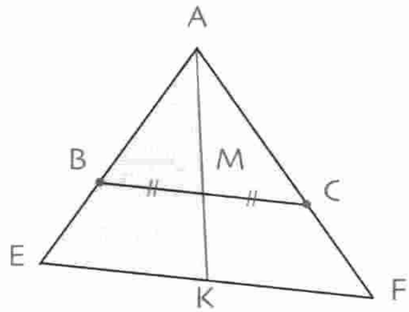
- برهّن أن الرأس المشترك و منتصفي الضلعين المتوازيين هي ثلاث نقط على استقامة واحدة.
- في الشكل المقابل، لدينا المستقيم (NT) يوازي (BC) و $BC = 4\,cm$ و $NT = 1,5\,cm$.
  احسب NI .



حل • الأشكال التالية توضح الحالات الممكنة للوضعية المطروحة و هي وضعيتا زاوية مشتركة و وضعية زاويتين متقابلتين بالرأس.







في هذه الحالات، الرأس المشترك هو النقطة A. الضلعان المتوازيان هما [BC] و [EF].

ليكن M منتصف [BC] و P منتصف [EF]. للبرهان على أن النقط الثلاث على استقامة واحدة يكفي البرهان على أن النقطة P تقع على المستقيم (AM).

إذن لنبرهن أن المستقيم (AM) يشمل P منتصف [EF]، أي أن (AM) يقطع [EF] في منتصفه P.

ليكن K نقطة تقاطع (AM) مع (EF).

المثلثان AMB و AKE في وضعية طالس. إذن $\frac{AM}{AK} = \frac{AB}{AE} = \frac{MB}{KE}$

المثلثان AMC و AKF في وضعية طالس. إذن $\frac{AM}{AK} = \frac{AC}{AF} = \frac{MC}{KF}$. ينتج أن $\frac{MB}{KE} = \frac{MC}{KF}$

و بما أن $MB = MC$ فإن $KE = KF$. ينتج أن K منتصف [EF] أي أنها النقطة P.

وبالتالي النقط P ، M ، A على استقامة واحدة.

- حسب النتيجة السابقة، فإن المتوسط المتعلق بالضلع [BC] في المثلث ABC هو المتوسط المتعلق بالضلع [NT] في المثلث ANT.
  إذن I منتصف NT . و بالتالي $NI = 0,75\,cm$.

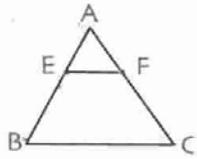
تمارين و مسائل

صحيح أو خاطئ

1 • 1 • في الشكل لدينا

(EF) يوازي (BC).

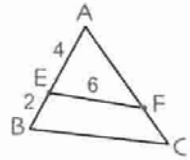
ينتج أن : $\frac{AE}{AB} = \frac{AF}{AC} = \frac{BC}{EF}$



2 • لاحظ الشكل حيث

(EF) يوازي (BC).

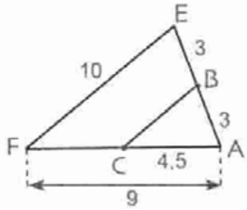
ينتج أن : $BC = 9$



3 • لاحظ الشكل حيث

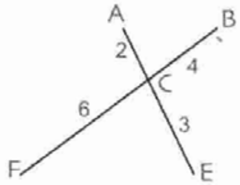
(BC) يوازي (EF)

ينتج أن : $BC = 5$



4 • لاحظ الشكل ينتج أن :

(AB) لا يوازي (EF).



5 • لاحظ الشكل ينتج أن : $\frac{IA}{AB} = \frac{JA}{AB}$

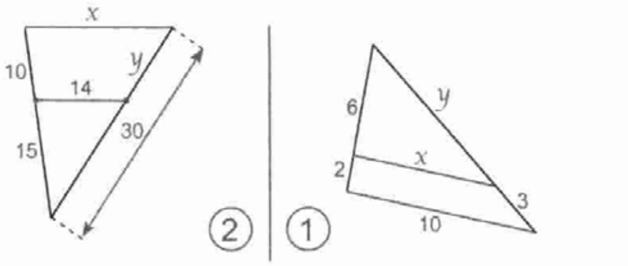
6 • لاحظ الشكل.

النقطة M التي تحقق $\frac{MA}{MB} = \frac{2}{3}$ هي M_3.

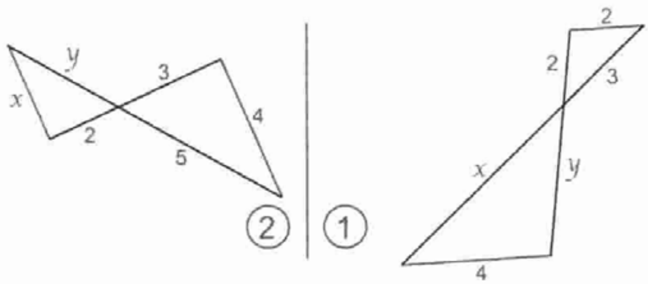
تمارين

استعمال نظرية طالس لحساب طول

2 • احسب الطولين x و y علما أن في كل شكل القطعتين الملونتين بالأحمر متوازيتان.

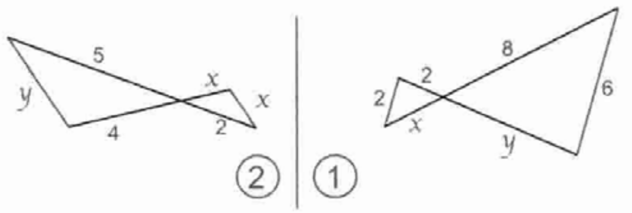


3 • نفس السؤال التمرين رقم 2.

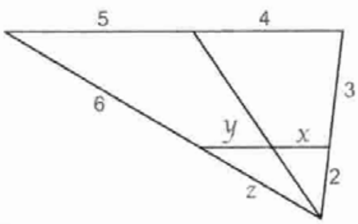


4 • نفس السؤال التمرين رقم 2.

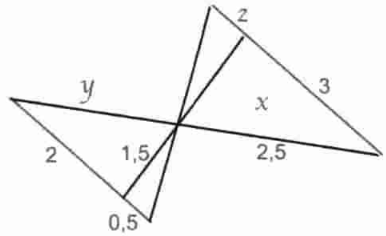
5 • نفس السؤال التمرين رقم 2.



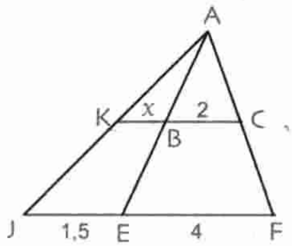
6 • نفس السؤال التمرين رقم 2.



7 • نفس السؤال التمرين رقم 2.



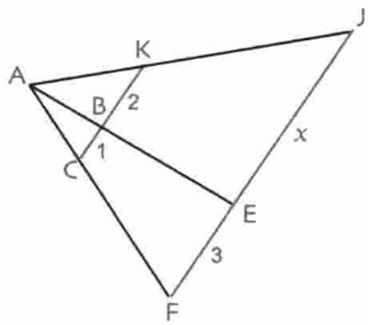
8 في الشكل القطع الملونة متوازية.



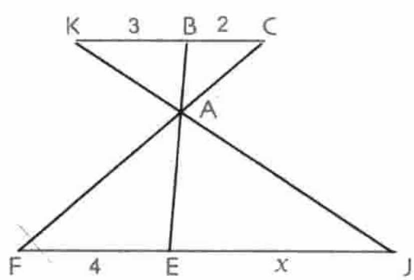
1 • اكتب كل النسب المساوية للنسبة $\frac{BC}{EF}$.

2 • استنتج x.

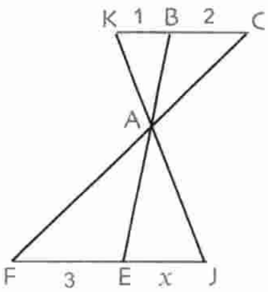
9 نفس السؤالين للتمرين 8.



10 نفس السؤالين للتمرين 8.



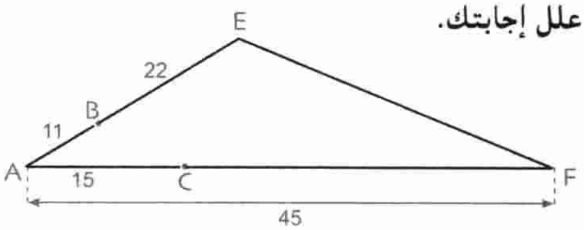
11 • نفس السؤالين للتمرين 8.



إستعمال النظرية العكسية لنظرية لطالس

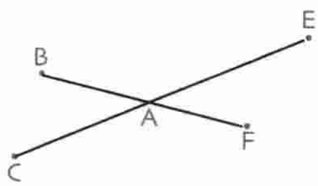
12 • هل المستقيمان (BC) و (EF) متوازيان ؟

• علل إجابتك.



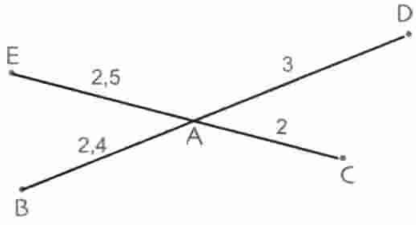
13 • نفس السؤال التمرين رقم 12.

AB = 3 ؛ AE = 4,5 ؛ AC = 3,9 ؛ AF = 2,6

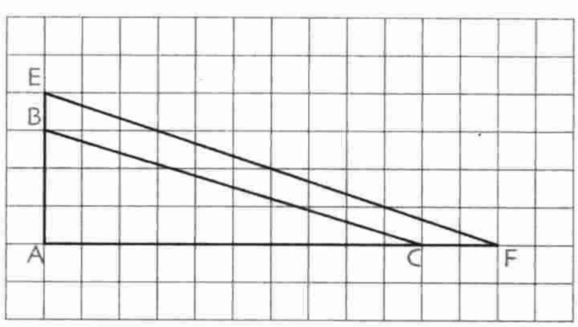


14 • هل المستقيمان (ED) و (BC) متوازيان ؟

• علل اجابتك.

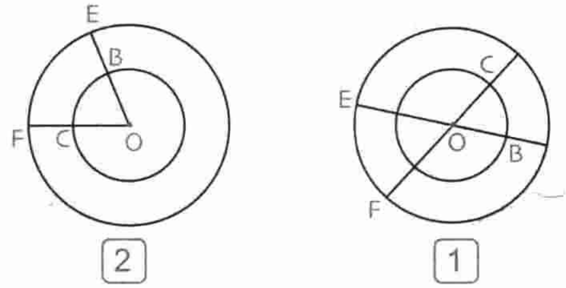


15 • هل المستقيمان (BC) و (EF) متوازيان ؟



16 • في كل من الشكلين 1 و 2، الدائرتان لهما نفس المركز حيث $OB = R$ و $OE = R'$.

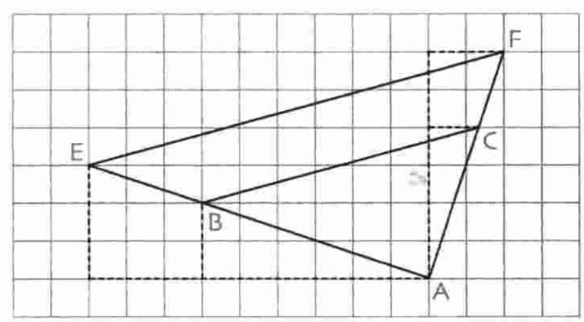
هل المستقيمان (BC) و (EF) متوازيان ؟



17 • لاحظ الشكل.

1 • احسب النسبتين $\frac{AB}{AE}$ و $\frac{AC}{AF}$.

2 • هل المستقيمان (BC) و (EF) متوازيان؟



نظرية طالس و تقسيم قطعة

18 [AB] قطعة مستقيم حيث $AB = 6$

1 • أنشئ النقطة M من القطعة [AB]

بحيث $\frac{NA}{NB} = \frac{7}{5}$.

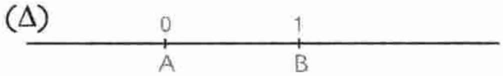
2 • أنشئ النقطة N من المستقيم (AB) و خارج القطعة [AB] بحيث $\frac{NA}{NB} = \frac{7}{5}$.

• تحقق بالحساب و بالقياس.

19 • نفس سؤال التمرين 18 مع $AB = 7$

و النسبة تساوي $\frac{2}{3}$.

20 • إليك المستقيم (Δ) المدرج.



• ضع النقطتين C و D اللتان فاصلاتاهما على الترتيب $\frac{2}{3}$ و $-\frac{2}{3}$.

مسائل

21 ABC مثلث. M منتصف [BC].

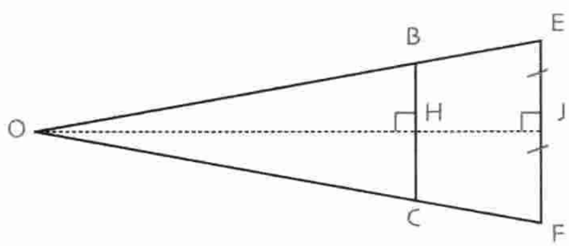
I و J المسقطان العموديان للنقطتين B و C على الترتيب على المستقيم (AM).

1 • برهن أن (BI) يوازي (CJ).

2 • برهن أن $CJ = BI$.

3 • برهن أن الرباعي BICJ متوازي أضلاع.

22 لاحظ الشكل.

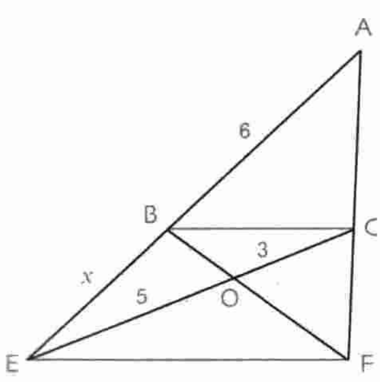


$OH = 5$ ؛ $BC = 3$ ؛ $EF = 8$ احسب OJ.

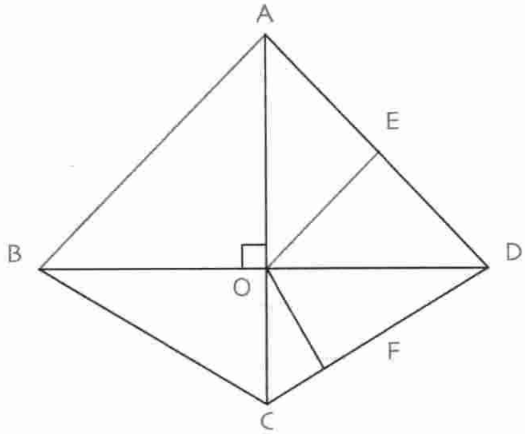
23 في الشكل التالي، القطع الملونة متوازية.

1 • قارن النسبتين $\frac{OC}{OE}$ و $\frac{AB}{AE}$.

2 • استنتج الطول x.



24 في الشكل الموالي المستقيم (OE) يوازي (AB) و (OF) يوازي (BC) و (AC) عمودي على (BD).



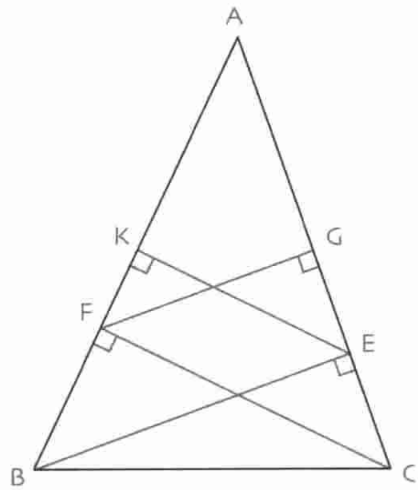
1 • قارن النسبتين $\frac{DE}{DA}$ و $\frac{DF}{DC}$.

2 • استنتج أن (EF) عمودي على (BD).

25 ABC مثلث زواياه حادة.

• (FG) و (BE) عموديان على (AC).

• (EK) و (CF) عموديان على (AB).



• برهن أن $AE \times AF = AB \times AG = AC \times AK$.

26 ABCD معين طول ضلعه 6 cm. E نقطة من [AB] و F نقطة من [CD] بحيث $\frac{AE}{AB} = \frac{1}{3}$ و $\frac{CF}{CD} = \frac{1}{3}$.

المستقيم (EF) يقطع (AD) في I و (BC) في J.

1 • برهن أن $FJ = EF = EI$.

2 • برهن أن المثلث DBI قائم في B.

27 لتكن ثلاث قطع مستقيمات أطوالها

$a = 2,4$ cm ؛ $b = 2,8$ cm ؛ $c = 5,4$ cm

• أنشئ، دون إجراء حساب، قطعة مستقيم طولها x بحيث $ax = bc$.

• تحقق بالحساب و بالقياس.

28 ABC مثلث.

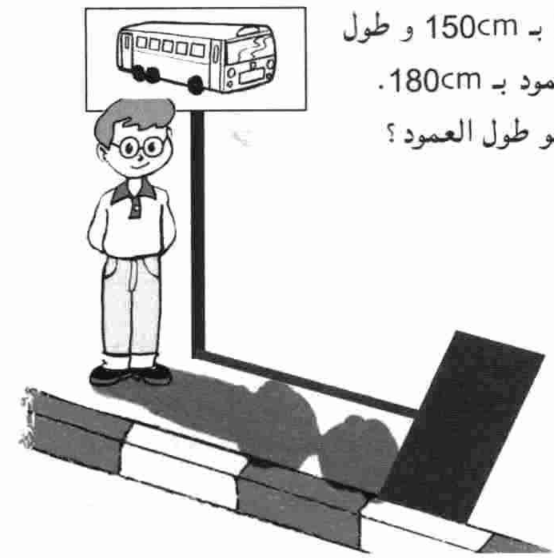
• أنشئ مستقيما يشمل C و يقطع الضلع [AB] بحيث تبعد A و B عن هذا المستقيم بمسافتين نسبتهما $\frac{5}{3}$.

29 تبلغ قامة رضا 170cm.

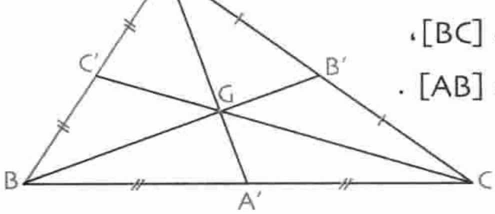
ينتظر حافلة في محطة عند عمود يدل على مكان موقف الحافلات، على الساعة الواحدة زوالاً. (الشكل)

في هذه اللحظة، قدِّر طول ظِل رضا بـ 150cm و طول ظل العمود بـ 180cm.

• فما هو طول العمود ؟



30 ABC مثلث و G مركز ثقله حيث



'B منتصف [AC]،

'A منتصف [BC]،

و 'C منتصف [AB].

(الشكل)

• برهن أن :

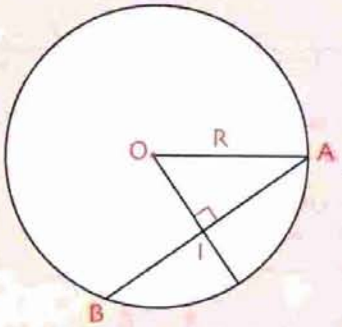
$AA' = 3GA'$

و $BB' = 3GB'$ و $CC' = 3GC'$.

10

حساب المثلثات في المثلث القائم

1 - جيب التمام، جيب و ظل زاوية حادة
2 - العلاقات بين النسب المثلثية



$AB = 2R\sin\frac{\widehat{AOB}}{2}$

ظهر علم حساب المثلثات استجابة لمتطلبات هندسية كالبنايات الكبرى مثل الأهرام و كذا لمراقبة السماء و سير النجوم و الكواكب.
يعتبر الرياضياتي الإغريقي ليبارك (Lipparque : 25 - 180 قبل الميلاد) من مدينة نيسي (Nycée)، مؤسس علم حساب المثلثات كونه أول من قسّم الدائرة إلى $360°$ و أعدّ جداول لأوتار الدائرة و هذا ما مهد لإعداد جداول للجيوب.

الكفاءات المستهدفة

(التي يجب اكتسابها)

- تعريف جيب و ظل زاوية حادة في مثلث قائم.

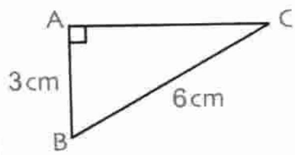
- استعمال الحاسبة لتعيين قيمة مقربة (أو القيمة المضبوطة) لكل من جيب و ظل زاوية حادة أو لتعيين قيس زاوية بمعرفة الجيب أو الظل.

- حساب زوايا أو أطوال بتوظيف الجيب أو جيب التمام أو الظل.

- إنشاء هندسيا (بالمسطرة غير المدرجة و المدور) زاوية بمعرفة القيمة المضبوطة لإحدى نسبها المثلثية.

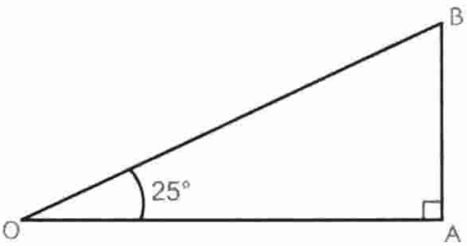
استبيان متعدد الإجابات

اختر الإجابة الصحيحة.

السؤال	الإجابة 1	الإجابة 2	الإجابة 3
1. من $\frac{2}{a} = \frac{a}{2}$ نستنتج أن …	$a^2 = 4$	$2a = 2$	$a = 4$
2. من المساواة $2 = \frac{50}{x}$ نستنتج أن …	$x = 100$	$x = \frac{1}{25}$	$x = 25$
3. من المساواة $\frac{5}{x} = -\frac{3}{2}$ نستنتج أن …	$x = \frac{10}{3}$	$-3x = 10$	$x = -\frac{3}{10}$
4. العدد الموجب x حيث $x^2 = 0{,}16$ هو …	0,4	0,04	1,26 بالتقريب إلى $\frac{1}{100}$
5. مدور العدد 1,264 911 إلى $\frac{1}{100}$ هو …	1,26	12,65	1,27
6. المثلث ABC قائم و وتره هو الضلع [AC]. إذن ضلعا الزاوية القائمة هما …	[AC] و [AB]	[BC] و [BA]	[CB] و [CA]
7. المثلث ABC قائم في A. إذن … 	$\cos\hat{B} = \frac{6}{3}$	$\cos\hat{B} = \frac{3}{6}$	$\cos\hat{B} = 0{,}5\text{cm}$
8. إذا كان $\cos\hat{B} = 0{,}5$ فإن …	$\hat{B} = 30°$	$\hat{B} = 60°$	$\hat{B} = 45°$
9. مدور $\cos 45°$ إلى $\frac{1}{100}$ هو …	0,77	0,71	0,70

أنشطة تحضيرية

النشاط 1



إليك الشكل المقابل :

1 • عيّن وتر المثلث القائم OAB.

2 • ما هو قيس $\hat{B}$ ؟

3 • عيّن الضلع المقابل للزاوية $\hat{O}$ و الضلع المجاور للزاوية $\hat{O}$.

النشاط 2 - جيب تمام زاوية في مثلث قائم

باستعمال نفس الشكل للنشاط 1 لدينا :

1 • $$\cos \hat{O} = \frac{\text{طول الضلع المجاور للزاوية } \hat{O}}{\text{طول الوتر}}$$

أكمل : $\cos \hat{O} = \frac{\cdots\cdots\cdots}{\cdots\cdots\cdots}$

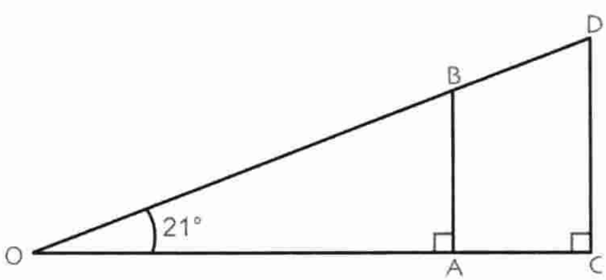
• عرف $\cos \hat{O}$. ما هي قيمة $\hat{B}$ بالدرجات ؟ إستنتج $\cos \hat{B}$ ؟

2 • استعمل الحاسبة لإتمام الجدول التالي.

الزاوية	جيب تمام الزاوية	المدور إلى $\frac{1}{100}$ لجيب تمام الزاوية
10°		
20°		
30°		
40°		

الزاوية	جيب تمام الزاوية	المدور إلى $\frac{1}{100}$ لجيب تمام الزاوية
45°		
50°		
60°		
75°		
80°		

النشاط 3 - جيب زاوية في مثلث قائم

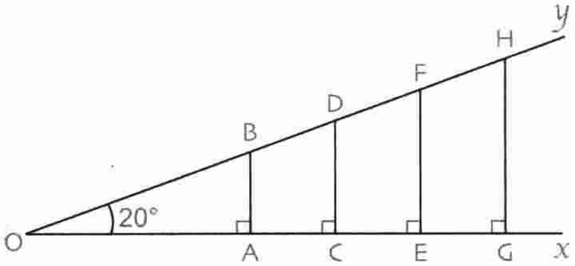


إليك الشكل المقابل :

1 • أثبت أن $\frac{OA}{OC} = \frac{OB}{OD} = \frac{AB}{CD}$

و أن $OB \times CD = OD \times AB$

• استنتج أن $\frac{AB}{OB} = \frac{CD}{OD}$



2 **.** لاحظ الشكل المقابل :

في كل من المثلثات القائمة OAB ؛ OCD ؛ OEF ؛ OGH

- عيّن الضلع المقابل للزاوية $\hat{O}$.
- أكمل الجدول التالي. (تقاس الأطوال المطلوبة بتقريب 1 mm).

المثلث القائم	OAB	OCD	OEF	OGH
طول الوتر				
طول الضلع المقابل للزاوية $\hat{O}$.				
حاصل قسمة طول الضلع المقابل للزاوية $\hat{O}$ على طول الوتر.				

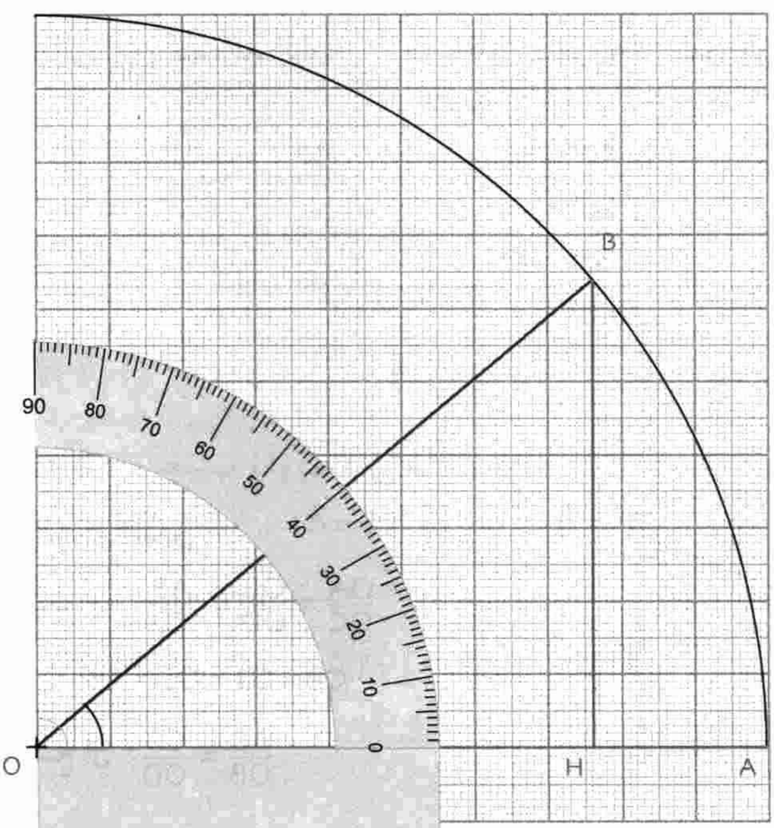
لاحظ أن للنسب نفس القيمة. هذه النسب غير متعلقة بموقع النقط A ،C ،E ،G على نصف المستقيم $[Ox)$،
فهي متعلقة بقيس الزاوية $\hat{O}$ فقط.

ملاحظة : هذه النسب أكبر من 0 و أصغر من 1.

النشاط 4 - تغير جيب أو جيب تمام زاوية

ارسم على ورق مليمتري ربع دائرة نصف قطرها 10 cm.
(كما هو مبين في الشكل المقابل).
لاحظ أن المثلث OHB قائم في H.
عندما تنتقل النقطة B على قوس ربع الدائرة فإن OB لا يتغير بينما BH يتغير.

- عيّن الزاوية $\widehat{BOH}$.
- عيّن جيب تمام الزاوية $\widehat{BOH}$.



استعمل الشكل السابق لإتمام الجدول التالي (تعطى القيم المحصل عليها مدورة إلى $\frac{1}{100}$)

قيس الزاوية $\hat{O}$	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°
جيب الزاوية $\hat{O}$				0,61				
جيب تمام الزاوية $\hat{O}$				0,76				

1 • كيف يتغير جيب زاوية عندما يزداد قيسها ؟

2 • هل الجدول السابق جدول تناسبية (أي هل جيب زاوية متناسب مع قيس زاوية) ؟

3 • نفس الأسئلة بالنسبة إلى جيب تمام زاوية.

النشاط 5 - ظل زاوية في مثلث قائم

x هو قيس زاوية حادة في مثلث قائم.

1 • باستعمال الحاسبة، أكمل الجدول التالي:

x	16°	29°	53°	72°	85°
$\sin x$					
$con\ x$					
$\frac{\sin x}{\cos x}$					

تعطى القيم بتقريب $\frac{1}{100}$.

2 • بعد اختيار الدرجة كوحدة قياس الزوايا ، نفذ البرنامج التالي:

اضغط على اللمسة tan ثم صب قيمة x .

اضغط على اللمسة = ثم إقرأ النتيجة على الشاشة.

قارن العدد المحصل عليه بالعدد $\frac{\sin x}{\cos x}$ في كل حالة من الحالات السابقة.

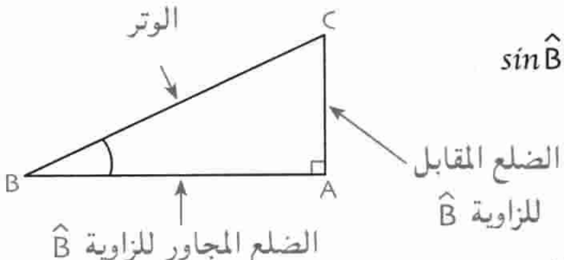
معارف

I - جيب و ظل زاوية حادة

1 • جيب زاوية

تعريف **ABC مثلث قائم في A.**

جيب الزاوية $\widehat{B}$ ، و الذي يرمز له بالرمز $sin\,\widehat{B}$، هو النسبة $\frac{AC}{BC}$.

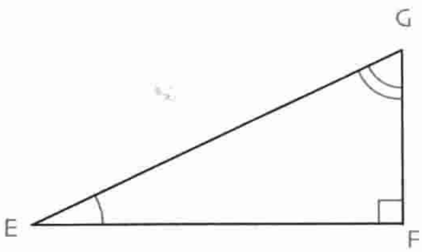


نكتب $sin\,\widehat{B} = \frac{AC}{BC}$. أي $sin\,\widehat{B} = \frac{\text{طول الضلع المقابل للزاوية } \widehat{B}}{\text{طول الوتر}}$

تذكير $cos\,\widehat{B} = \frac{\text{طول الضلع المجاور للزاوية } \widehat{B}}{\text{طول الوتر}}$ أي $cos\,\widehat{B} = \frac{AB}{BC}$

ملاحظة **كل من جيب و جيب تمام زاوية حادة في مثلث قائم هو عدد موجب محصور بين 0 و 1.**

مثال **EFG مثلث قائم في F.**

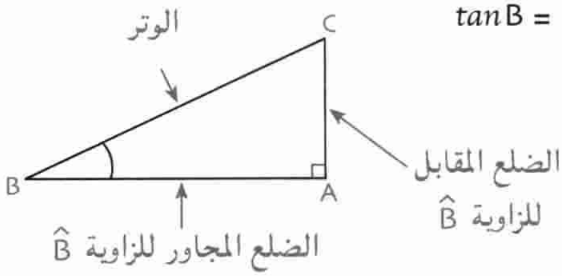


$sin\,\widehat{E} = \frac{FG}{EG}$ ؛ $sin\,\widehat{G} = \frac{EF}{EG}$

2 • ظل زاوية

تعريف **ABC مثلث قائم في A.**

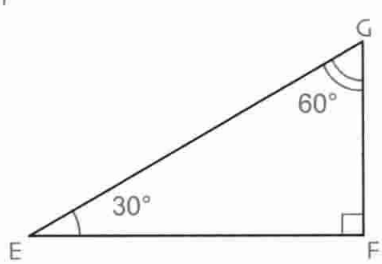
ظل الزاوية $\widehat{B}$، و الذي يرمز له بالرمز $tan\,\widehat{B}$، هو النسبة $\frac{AC}{AB}$.



نكتب $tan\,\widehat{B} = \frac{AC}{AB}$. أي $tan\,\widehat{B} = \frac{\text{طول الضلع المقابل للزاوية } \widehat{B}}{\text{طول الضلع المجاور للزاوية } \widehat{B}}$

ملاحظة **ظل زاوية حادة في مثلث قائم هو عدد موجب.**

مثال **في المثلث EFG القائم في F لدينا :**



$tan\,\widehat{E} = \frac{FG}{EF}$ ؛ $tan\,\widehat{G} = \frac{EF}{FG}$

2 - العلاقات بين النسب المثلثية

ABC مثلث قائم في A. x هو قيس إحدى زاويتيه الحادتين.

خاصية $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$

برهان ABC مثلث قائم في A. نضع $x = \hat{B}$، فيكون $\dfrac{\sin x}{\cos x} = \dfrac{\frac{AC}{BC}}{\frac{AB}{BC}} = \dfrac{AC}{BC} \times \dfrac{BC}{AB} = \dfrac{AC}{AB}$

و نعلم أن : $\tan x = \dfrac{AC}{AB}$ إذن $\dfrac{\sin x}{\cos x} = \dfrac{AB}{AC}$

و بالتالي : $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$.

خاصية $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$

ملاحظة الكتابة $\sin^2 x$ تدل على $(\sin x)^2$

برهان ABC مثلث قائم في A . بوضع $x = \hat{B}$ ينتج أن $\cos^2 x + \sin^2 x = \left(\dfrac{AB}{BC}\right)^2 + \left(\dfrac{AC}{BC}\right)^2$

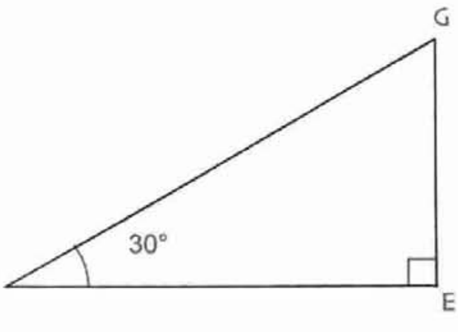
$$= \frac{AB^2 + AC^2}{BC^2}$$

و حسب نظرية فيثاغورث لدينا : $AB^2 + AC^2 = BC^2$

و بالتالي : $\dfrac{AB^2 + AC^2}{BC^2} = \dfrac{BC^2}{BC^2} = 1$

إذن $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$

مثال EEG مثلث قائم في E.



لدينا : $\cos^2 \hat{F} + \sin^2 \hat{F} = 1$

أي : $\cos^2 30° + \sin^2 30° = 1$

$(0,87)^2 + (0,50)^2 \approx 1$ (يمكن التحقق بالحاسبة).

قيس الزاوية $\hat{G}$ هو $60°$.

بتطبيق نفس العلاقة، نجد:

$\cos^2 60° + \sin^2 60° = 1$

طرائق

1 - استعمال حاسبة

1 • استعمال حاسبة لإيجاد نسبة مثلثية لزاوية

طريقة لحساب جيب زاوية x علم قيسها بالدرجة، باستعمال حاسبة، ننفذ البرنامج التالي :

MODE DRG sin صب قيمة x =

ملاحظة • ينفذ البرنامج من اليسار إلى اليمين.

• نختار اللمسة cos أو tan لحساب جيب التمام x أو ظل x.

تمرين 1 احسب $\sin 25°$ بتقريب $\frac{1}{100}$.

حل • استعمال الحاسبة : نضغط على اللمسة MODE ثم DRG لاختيار الدرجة كوحدة قياس الزوايا.

• ننفذ البرنامج التالي (من اليسار إلى اليمين) sin 25 =

و يظهر على الشاشة : 0.42261828 .

بالتدوير إلى $\frac{1}{100}$ تكتب $\sin 25° \approx 0.42$

تمرين 2 ما هو $\tan 36°$ بتقريب $\frac{1}{100}$.

حل • استعمال الحاسبة : نضغط على اللمسة MODE ثم DRG لاختيار الدرجة كوحدة قياس الزوايا.

• ننفذ البرنامج التالي (من اليسار إلى اليمين) tan 36 =

و يظهر على الشاشة : 0.72654255 و بالتدوير إلى $\frac{1}{100}$ نكتب $\tan 36° \approx 0,73$

2 • استعمال حاسبة لإيجاد قيس زاوية إحدى نسبها المثلثية معلومة

طريقة لحساب القيس x بالدرجة لزاوية علم جيب هذه الزاوية، باستعمال حاسبة، ننفذ البرنامج التالي :

MODE DRG 2 nd $\sin^{-1}$ صب قيمة x =

ملاحظة • في بعض الحاسبات، اللمسة 2 nd تعوض باللمسة SHIFT .

• نختيار اللمسة $\cos^{-1}$ أو $\tan^{-1}$ لحساب القيس بالدرجة لزاوية علم جيب تمام هذه الزاوية أو ظلها.

تمرين 1 ما هي الزاوية x بالدرجة حيث $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ بتقريب $\frac{1}{100}$ ؟

حل • نختار الدرجة كوحدة قياس الزوايا باللمستين MODE ثم DRG

2nd $\sin^{-1}$ (√ 2 : 2) = 45.

إذن نكتب $x = 45°$ وهذه قيمة مضبوطة.

تمرين 2 • ما هي الزاوية x حيث $\tan x = 2{,}72$ ؟ أعط مدور هذه القيمة إلى $\frac{1}{100}$.

حل • نستعمل الحاسبة بعد اختيار الدرجة كوحدة لقياس الزوايا.

2nd $\tan^{-1}$ 2,72 = 69.81419699

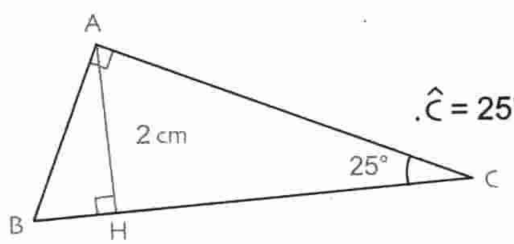
و بالتدوير إلى $\frac{1}{100}$ نكتب : $x \approx 69{,}81°$.

2 - حساب أطوال بتوظيف الجيب أو جيب التمام أو الظل

طريقة

لحساب طول يمكن توظيف الجيب أو جيب التمام أو الظل باتباع المراحل التالية :
1 • نعين مثلثا قائما يكون هذا الطول هو طول أحد أضلاعه.
2 • نختار الزاوية الحادة و النسبة المثلثية لها بحيث يكون هذا الطول هو المجهول الوحيد في معادلة.
3 • نحل المعادلة و نحتفظ بالحلول الموجبة.
4 • نتحقق بالمسطرة المدرجة على الشكل.

تمرين 1 في مثلث قائم ، الارتفاع المتعلق بالوتر هو 2 cm و قيس إحدى زواياه هو 25°.
• احسب المسافة بين رأس هذه الزاوية و حامل الإرتفاع.



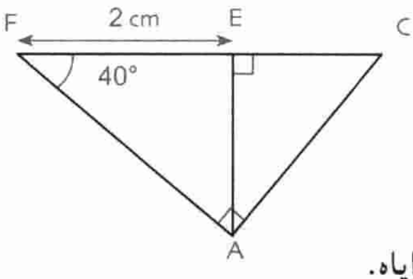
حل ليكن ABC المثلث القائم في A. [AH] هو الإرتفاع و $\widehat{C} = 25°$.
المسافة بين الرأس C و حامل الإرتفاع هو HC.
[HC] هو ضلع في المثلث AHC القائم في H

و $\widehat{C}$ هي إحدى زوايا هذا المثلث. لدينا : $\tan \widehat{C} = \frac{AH}{HC}$ أي $HC = \frac{AH}{\tan \widehat{C}} = \frac{2}{\tan \widehat{C}}$.

باستعمال الحاسبة و بتنفيذ البرنامج التالي : 2 : (tan 25) =

نجد : 4.289013841

و بالتدوير إلى $\frac{1}{100}$ نتحصل على : $AH \approx 4.29$ cm.



تمرين 2 إليك الشكل المقابل.

• احسب الطول AE.

حل [EF] ضلع في المثلث AEF القائم في E. $\hat{F}$ هي إحدى زواياه.

لدينا : $cos\,\hat{F} = \frac{EF}{AF}$ أي $cos\,40° = \frac{2}{AF}$ و بالتالي : $AF = \frac{2}{cos\,40°}$

باستعمال الحاسبة و بتنفيذ البرنامج التالي : 2 : (cos 40) =

نجد : 2,610814579

بالتدوير إلى $\frac{1}{100}$ ، نكتب $AF \approx 2,61$ cm.

3 - حساب قيس زاوية حادة

طريقة

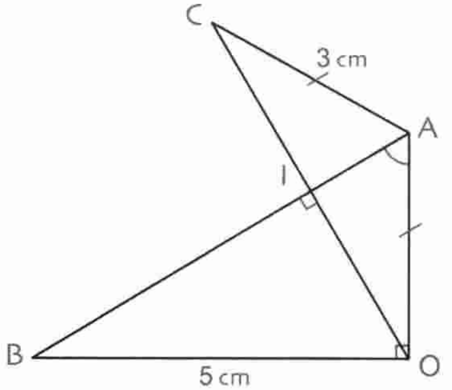
لحساب قيس زاوية حادة يمكن توظيف النسب المثلثية لزاوية حادة في مثلث قائم و العلاقات بينها.

• نعين مثلثا قائما بحيث تكون هذه الزاوية هي إحدى زاويتيه الحادتين.

• نختار الزاوية و النسبة المثلثية لها بحيث يمكن حساب هذه النسبة .

• نستعمل الحاسبة لتعيين قيس الزاوية.

• نتحقق بالمنقلة.



تمرين 1 إليك الشكل المقابل.

• احسب قيس الزاوية $\widehat{IAO}$.

حل $\widehat{IAO}$ هي زاوية حادة في المثلث IAO القائم في O.

لدينا : $tan\,\widehat{IAO} = tan\,\widehat{BAO}$

نعلم أن $tan\,\widehat{BAO} = \frac{BO}{OA} = \frac{5}{3}$

إذن $tan\,\widehat{IAO} = \frac{5}{3}$

لحل المعادلة $tan\,\widehat{IAO} = \frac{5}{3}$ نستعمل الحاسبة فنتحصل على $\widehat{IAO} \approx 59°$.

تمرين 2 • احسب بدون استعمال حاسبة، القيمة المضبوطة لجيب زاوية قيسها x علما أن $\cos x = 0,6$.

حل نعلم أن $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ إذن $(0,6)^2 + \sin^2 x = 1$ أي $0,36 + \sin^2 x = 1$
إذن $\sin^2 x = 1 - 0,36 = 0,64$.
و بالتالي : $\sin x = \sqrt{0,64}$ (لأن $\sin x$ موجب). إذن $\sin x = 0,8$ (لأن $\sqrt{0,64} = 0,8$)

4 - إنشاء هندسيا زاوية علمت القيمة المضبوطة لإحدى نسبها المثلثية

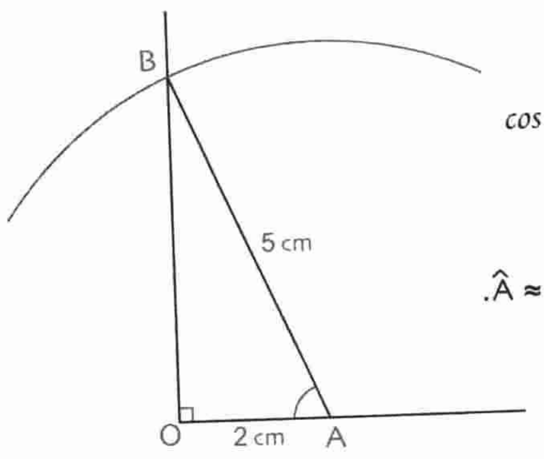
طريقة

لإنشاء هندسيا زاوية علمت القيمة المضبوطة لإحدى نسبها المثلثية نكتب النسبة المثلثية على شكل كسر.

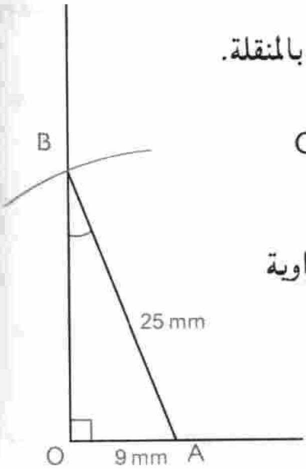
- **إذا كانت النسبة المثلثية هي جيب أو جيب تمام الزاوية ننشئ مثلثا قائما فإن طول أحد ضلعي زاويته القائمة هو بسط الكسر و طول وتره هو مقامه.**
- **إذا كانت النسبة المثلثية هي ظل الزاوية ننشئ مثلثا قائما فإن طولا ضلعي زاويته القائمة هما بسط و مقام الكسر.**

تمرين 1 • أنشئ دون استعمال المنقلة زاوية بحيث جيبها التمام هو $\frac{2}{5}$. تحقق بالحاسبة و بالمنقلة.

حل ليكن x قيس هذه الزاوية. لدينا $\cos x = \frac{2}{5}$.
هذه النسبة مكتوبة على شكل كسر مقامه 5 و بسطه 2. ليكن السنتيمتر هو وحدة الطول.
ننشئ زاوية قائمة رأسها O. نعين على أحد ضلعيها النقطة A بحيث OA = 2 cm
ثم نرسم الدائرة التي مركزها A و نصف قطرها 5 cm.
هذه الدائرة تقطع الضلع الثاني للزاوية القائمة في B.
في المثلث AOB القائم في O، لدينا : $\cos \hat{A} = \frac{OA}{AB} = \frac{2}{5}$
الزاوية $\widehat{OAB}$ هي حل.



التحقق بالحاسبة نجد : $\hat{A} \approx 66,4°$ بالمنقلة نقرأ : $\hat{A} \approx 66°$.



تمرين 2 • أنشئ، دون استعمال المنقلة، زاوية بحيث جيبها هو 0,36. تحقق بالحاسبة و بالمنقلة.

حل $0,36 = \frac{36}{100} = \frac{9}{25}$ وحدة الطول هي المليمتر. ننشئ أولا زاوية قائمة رأسها O و نعين على أحد أضلاعها النقطة A بحيث $OA = 9\ mm$.

نرسم الدائرة التي مركزها A و نصف قطرها 25 mm فتقطع الضلع الثاني للزاوية القائمة في النقطة B.

في المثلث القائم AOB في O لدينا : $sin\,\widehat{B} = \frac{OA}{AB} = \frac{9}{25} = \frac{36}{100}$

الزاوية $\widehat{B}$ هي الحل.

التحقيق بالحاسبة نجد : $\widehat{B} \approx 21,1°$ بالمنقلة نقرأ : $\widehat{B} \approx 21°$

تمرين 3 • أنشئ ، دون استعمال المنقلة، زاوية ظلها 4,5. تحقق بالحاسبة و بالمنقلة.

حل $\frac{9}{2} = 4,5$ ننشئ أولا زاوية قائمة رأسها O.

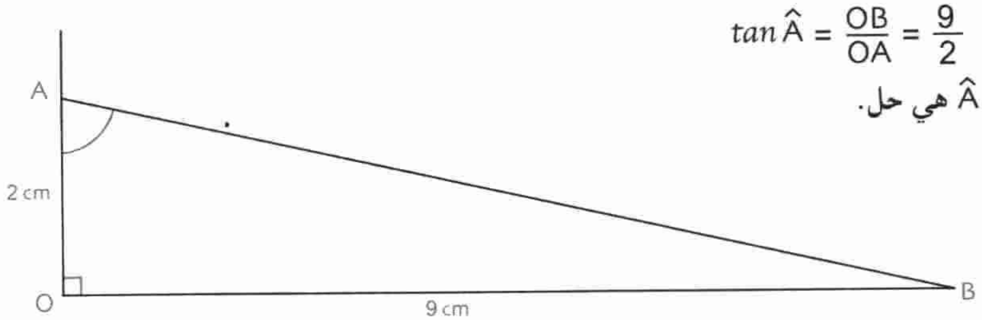
نعين على أحد ضلعي الزاوية القائمة النقطة A بحيث $OA = 2\ cm$

و على الضلع الثاني للزاوية القائمة النقطة B بحيث $OB = 9\ cm$.

في المثلث القائم AOB في O

لدينا : $tan\,\widehat{A} = \frac{OB}{OA} = \frac{9}{2}$

الزاوية $\widehat{A}$ هي حل.



التحقق بالحاسبة : $\widehat{A} \approx 77,5°$ بالمنقلة : $\widehat{A} \approx 78°$

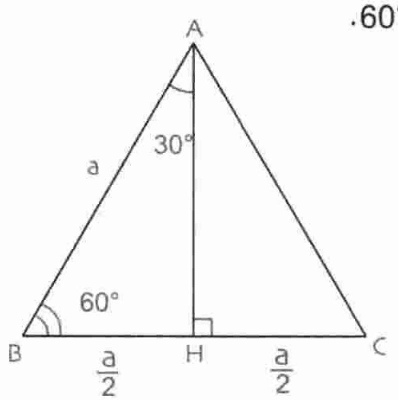
ملاحظة
- في الحالات الثلاث المدروسة، حولت النسبة المثلثية المعطاة إلى كسر.
- يتم اختار وحدة الطول حسب قيمتي بسط و مقام هذا الكسر.

تمرين محلول

تمرين ABC مثلث متقايس الأضلاع، طول ظلعه a و [AH] إرتفاع له.

1 . أثبت أن $AB = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

2 . استنتج قيمة النسبة المثلثية المضبوطة لكل من الزاويتين °30 و °60.



حل 1 . المثلث ABC متقايس الأضلاع.

بما أن كل عمود هو منصف و متوسط و المثلث AHB قائم في H

و بتطبيق نظرية فيثاغورث نحصل على :

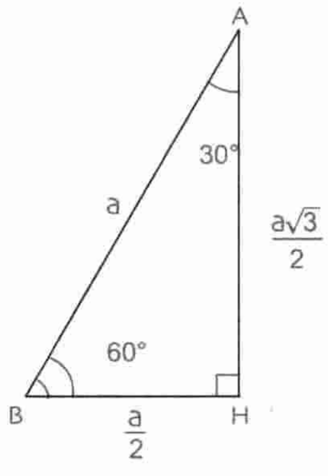
$AB^2 = AH^2 + BH^2$ و بالتعويض نجد : $a^2 = AH^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$

إذن $AH^2 = a^2 - \frac{a^2}{4} = \frac{3a^2}{4}$

و بالتالي $AH = \sqrt{\frac{3a^2}{4}} = \frac{\sqrt{3a^2}}{\sqrt{4}} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

ينتج أن : $AH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

2 . في المثلث AHB القائم في H لدينا :



$$\cos 30° = \frac{AH}{AB} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin 30° = \frac{BH}{AB} = \frac{1}{2}$$

$$\tan 30° = \frac{\sin 30°}{\cos 30°} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\cos 60° = \frac{BH}{AB} = \frac{1}{2}$$

$$\sin 60° = \frac{AH}{AB} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan 60° = \frac{AH}{BH} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{\frac{a}{2}} = \sqrt{3}$$

ملاحظة • نلاحظ أن $\cos 60° = \sin 30°$ و $\sin 60° = \cos 30°$.

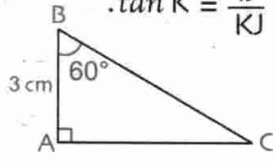
• في هذه الحالة نقول عن المثلث AHB إنه نصف مثلث متقايس الأضلاع.

صحيح أو خاطئ

1 1 • EFG مثلث قائم في G. إذن $\sin\hat{E} = \frac{GE}{EF}$.

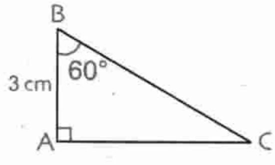
2 • IJK مثلث قائم في J. إذن $\tan\hat{K} = \frac{IJ}{KJ}$.

3 • من الشكل



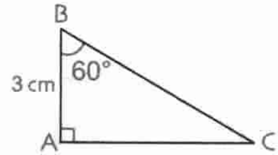
ينتج $AC = 3\times\sin 60°$

4 • من الشكل



ينتج $BC = \frac{3}{\sin 60°}$.

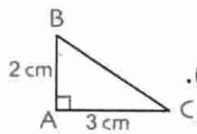
5 • من الشكل



ينتج $AC = AB\times\tan 60°$

6 • $\sin\hat{A} = 0,70$. إذن مدور $\hat{A}$ إلى الدرجة هو $30°$.

7 • من الشكل نستنتج أن :



مدور $\hat{B}$ الى $\frac{1}{10}$ من الدرجة هو $62,5°$.

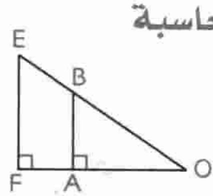
8 • من أجل كل زاوية قيسها x ،

$\sin x = \tan x \times \cos x$.

تمارين

النسب المثلثية - إستعمال حاسبة

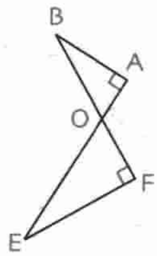
2 لاحظ الشكل المقابل.



برهّن أن :

$\frac{AB}{OA} = \frac{EF}{OF}$ و $\frac{AB}{OB} = \frac{EF}{OE}$

3 لاحظ الشكل المقابل.



1 • برهّن أن $\widehat{AOB} = \widehat{EOF}$

2 • برهّن أن $\frac{AB}{OA} = \frac{EF}{OF}$ و $\frac{AB}{OB} = \frac{EF}{OE}$

4 ABC مثلث حيث $AC = 5cm$ ؛ $BC = 4cm$

$AB = 3cm$.

1 • برهّن أن المثلث ABC قائم في B.

2 • احسب $\cos\hat{A}$ ؛ $\sin\hat{A}$ ؛ $\cos\hat{C}$ ؛ $\sin\hat{C}$.

5 نفس الأسئلة بالنسبة إلى المثلث ABC حيث :

$AC = 17,5cm$ ؛ $BC = 14cm$ ؛ $AB = 10,5cm$

6 ABC مثلث حيث $AC = 13cm$ ؛ $BC = 10,4cm$

$AB = 7,8cm$.

1 • برهّن أن المثلث ABC قائم في B.

2 • احسب $\tan\hat{C}$ ؛ $\tan\hat{A}$

7 1 • أرسم مثلثا قائما، حيث قيس زاويتيه الحادتين هو $38°$.

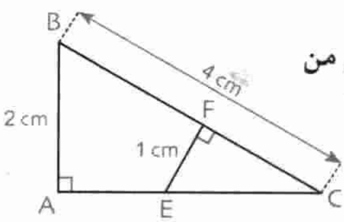
2 • احسب $\tan 38°$ بتقريب $\frac{1}{100}$.

3 • باستعمال الحاسبة أعط المدور إلى $\frac{1}{100}$ للعدد $\tan 38°$.

8 1 • إستعمل الحاسبة لتعيين المدور إلى $\frac{1}{100}$ لـ $\tan 55°$.

2 • تحقق برسم مثلث قائم و بحساب $\tan 55°$.

9 إليك الشكل المقابل.



1 • عبّر عن $\sin\hat{C}$ في كل من المثلث القائم ACB و المثلث القائم EFC.

2 • احسب EC.

10 استعمل الحاسبة لملئ الجدول التالي :

	المدور إلى $\frac{1}{1000}$	المدور إلى $\frac{1}{100}$	المدور إلى $\frac{1}{10}$
$\sin 56°$			
$\cos 56°$			
$\tan 56°$			

11 استعمل الحاسبة لتعيين قيمة تقريبية للزاوية x في كل من الحالات التالية :

	قيمة x مدورة إلى $\frac{1}{100}$	قيمة x مدورة إلى $\frac{1}{10}$
$\sin x = 0,52$		
$\cos x = 0,25$		
$\tan x = 1,37$		

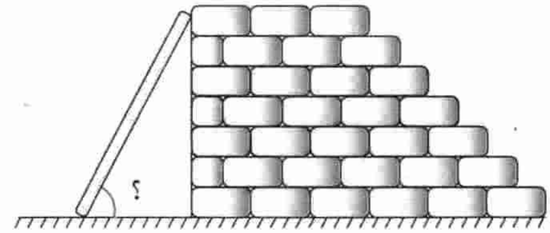
12 استعمل الحاسبة لتعيين المدور إلى $\frac{1}{100}$ للزاوية x في كل من الحالات التالية :

$\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$	$\tan x = 1 + \sqrt{2}$
$\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$	$\tan x = 2(\sqrt{2} - 1)$

حساب زوايا

13 طول سلم هو 2 m. وضع هذا السلم على أرضية أفقية متكئا على حائط عمودي على الأرضية بحيث يبعد عن أسفل الحائط بمسافة قدرها 1,3 m.

• احسب الزاوية الي يكونها السلم مع سطح الأرضية.



14 • ارسم دائرة مركزها O و نصف قطرها 2,5 cm.

• ارسم [AB] قطرا لها.

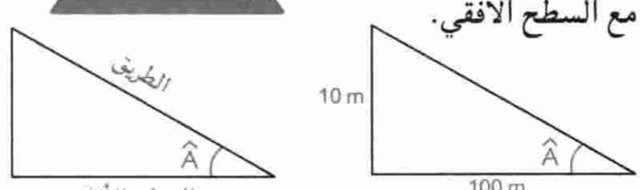
• ضع نقطة C على الدائرة بحيث تبعد عن النقطة A بمسافة 3 cm.

1 • ما نوع المثلث ABC ؟ علل إجابتك.

2 • احسب زوايا المثلث ABC.

15 لاحظ إشارة المرور التالية :

الكتابة 10% تدل على أن الطريق ارتفع بـ 10 m لكل 100 m أفقية. 10% هو ميل الطريق (الشكل)، أي هو ظل الزاوية التي يكونها هذا الطريق مع السطح الأفقي.



طول طريق هو 1000 m و ميله 10%.

• بكم ارتفع بالنسبة إلى السطح الأفقي ؟

16 ميل طريق هو 8%.

• ما هي الزاوية التي يكونها الطريق مع السطح الأفقي ؟

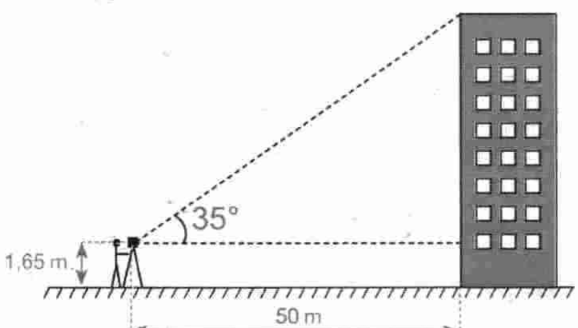
17 تنتقل ناقلة على حبل طوله 500 m من محطة ترتفع عن سطح البحر بـ 40m إلى محطة ترتفع عن سطح البحر بـ 350m.

• ما هي الزاوية التي يكونها حبل الناقلة مع السطح الأفقي؟

حساب أطوال

18 يريد طوبوغرافي قياس ارتفاع عمارة. فيضع آلة قياس الزوايا تعلى ارتفاع 1,65 m بحيث تبعد عن أسفل العمارة بمسافة 50 m (أنظر الشكل).

• احسب ارتفاع العمارة (تدور النتيجة إلى $\frac{1}{100}$).

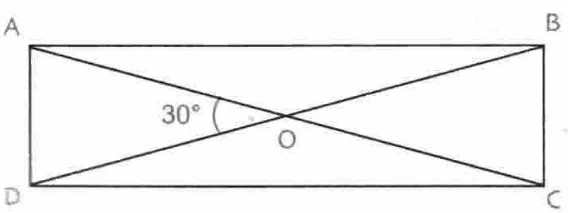


19 يوضع سلم طوله 3,5 m متكئا على حائط مكونا زاوية 80° مع الأرضية الأفقية.

• إلى أي علو يصل السلم ؟ دوّر النتيجة إلى $\frac{1}{100}$.

20 ABCD مستطيل طول قطره 10 cm.

يتقاطع القطران في النقطة O فيكونان زاوية حادة قيسها 30°. (الشكل)

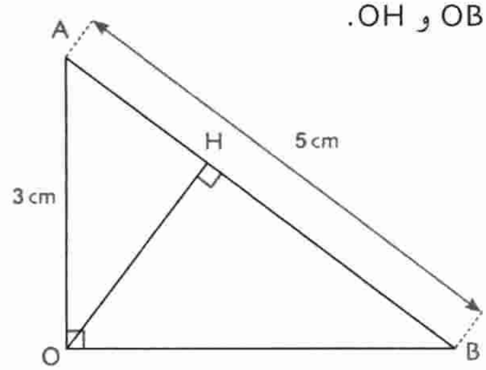


1 • احسب $\widehat{OAB}$.

2 • احسب طول و عرض المستطيل.

21 إليك الشكل المقابل.

• احسب OB و OH.



22 ABC مثلث متساوي الساقين رأسه الأساسي A حيث $\hat{A} = 50°$ و ارتفاعه $AH = 8\ cm$.

• احسب طول كل ضلع من المثلث.

إنشاءات هندسية

23 • أنشئ، دون استعمال منقلة، زوايا جيبها $\frac{3}{5}$ ؛ $\frac{1}{3}$ و 0,82 على الترتيب.

24 • نفس سؤال 23 حيث الأعداد هي جيب تمام الزاوية.

25 • أنشئ، دون استعمال منقلة، زوايا ظلها :

3 ؛ 2 ؛ 0,7 ؛ 0,5 على الترتيب.

العلاقات بين النسب المثلثية

26 x هو قيس زاوية حادة بحيث $\sin x = 0{,}8$.

• احسب، دون استعمال حاسبة، القيمة المضبوطة للعدد $\cos x$.

27 x هو قيس زاوية حادة بحيث $\cos x = 0{,}25$.

• دون حساب x، احسب المدور الى $\frac{1}{100}$ للعدد $\sin x$.

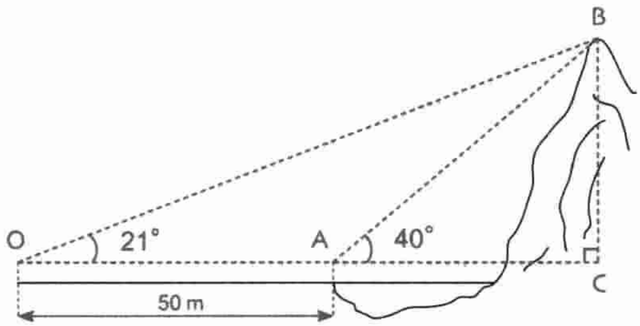
• استنتج المدور إلى $\frac{1}{100}$ للعدد $\tan x$.

28 ABC مثلث قائم في C.

• أثبت أن $1 + \tan \hat{A} = \frac{1}{\cos^2 \hat{A}}$.

مسائل

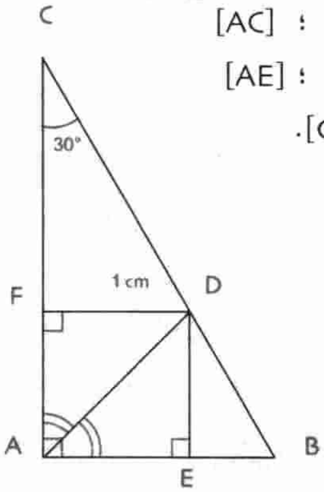
29 لحساب ارتفاع صخر يقوم الطبوغرافي بقياس زاويتين كما يبينه الشكل الموالي.



يقيس الزاوية $\hat{A}$ و هي $40°$ ثم يبتعد عن النقطة A بمسافة 50m حتى النقطة O، فيقيس الزاوية $\hat{O}$ و هي $21°$.

• احسب الإرتفاع BC للصخر.

30 • لاحظ الشكل التالي ثم احسب أطوال القطع [AB] ؛ [AC] [DC] ؛ [AE] و [CF].



31 ABC مثلث قائم في A. [AH] هو ارتفاع.

1 • احسب بكيفيتين $\cos \hat{B}$.

2 • استنتج أن $BA^2 = BH \times BC$.

3 • أوجد علاقة مماثلة بالنسبة للعدد CA^2.

4 • برهن أن $HA^2 = HB \times HC$.

11

الأشعة و الإنسحاب

1 - مفهوم الشعاع

2 - تساوي شعاعين

3 - تركيب انسحابين – مجموع شعاعين

Guisto Bella vitis
1803-1880

إن استعمال الأشعة حديث العهد حيث استعمال الرياضياتي الإيطالي ڤيستو بيلافيتيس (Guisto Bella vitis : 1803-1880) ما سماه «القطع المتسايرة» و ذلك سنة 1832 في احدى مؤلفاته عرض طريقة التساير و هذا لأول مرة. بعد ذلك تغير اسم هذه الطريقة ليصبح «الأشعة المتسايرة».

أما الرمز $\overrightarrow{AB}$ فقد بدأ استعماله في البرامج التعليمية في بداية القرن العشرين.

الكفاءات المستهدفة

(التي يجب اكتسابها)

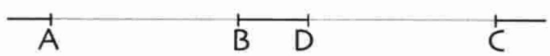
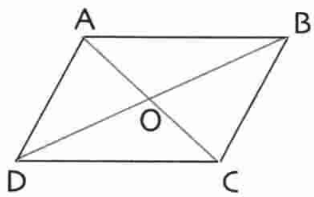
- تعريف شعاع انطلاقا من الانسحاب.

- معرفة تساوي شعاعين و استعمالها.

- معرفة علاقة شال و استعمالها لإنشاء مجموع شعاعين أو لإنشاء شعاع يحقق علاقة شعاعية معينة أو لإنجاز براهين بسيطة.

استبيان متعدد الإجابات

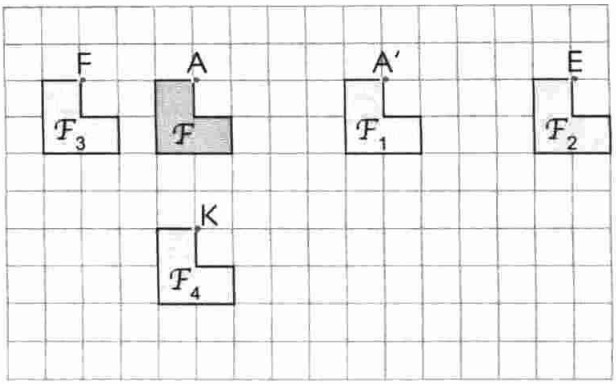
إختر الإجابة الصحيحة .

السؤال	الإجابة 1	الإجابة 2	الإجابة 3
1 • الرباعي DABC متوازي أضلاع يعني ...	(CD) يوازي (AB) و $AB = AC$.	[AB] و [BC] متقايسان.	[AC] و [BD] متناصفان.
2 • في الشكل الموالي النقط A، B، C، D على استقامة واحدة و $AB = DC$. إذن ... 	[AC] و [AD] لهما نفس المنتصف.	[AC] و [BD] لهما نفس المنتصف.	[AB] و [CB] لهما نفس المنتصف.
3 • ABCD متوازي أضلاع. إذن ... 	ABC و ADC متناظران بالنسبة إلى المستقيم (BD).	ABC و ADC متناظران بالنسبة إلى النقطة O.	(AC) محور تناظر متوازي الأضلاع.
4 • لكي يكون رباعي متوازي أضلاع يكفي أن ...	يتقايس قطراه.	يكون له ضلعان متوازيان.	يكون له ضلعان متقايسان و متوازيان.
5 • ABCD متوازي أضلاع D هي صورة C بالإنسحاب الذي يحول ...	A إلى B.	B إلى A.	B إلى D.
6 • ABC مثلث. D هي صورة C بالانسحاب الذي يحول A إلى B. إذن ...	ABDC متوازي أضلاع.	ABCD متوازي أضلاع.	ACBD متوازي أضلاع.
7 • D هي صورة C بالانسحاب الذي يحول A إلى B. إذن ...	[AC] و [BD] متناصفان.	[AD] و [BC] متناصفان.	$AD = BC$.
8 • ABCD متوازي أضلاع. الانسحاب الذي يحول A إلى B هو الانسحاب الذي يحول ...	B إلى D.	D إلى C.	C إلى D.

أنشطة تحضيرية

النشاط 1

لاحظ الشكل المقابل.



يمكن إزاحة الشكل $\mathcal{F}$ للحصول على الأشكال $\mathcal{F}_1$ ، $\mathcal{F}_2$ ،$\mathcal{F}_3$ ،$\mathcal{F}_4$.

- عيّن الانسحابات المستعملة.

مثلا : للحصول على $\mathcal{F}_1$ ، نستعمل الانسحاب الذي يحول A إلى A′ . تكون الإزاحة وفق المستقيم (AA′).

إذن منحى هذا الانسحاب هو منحى المستقيم (AA′).

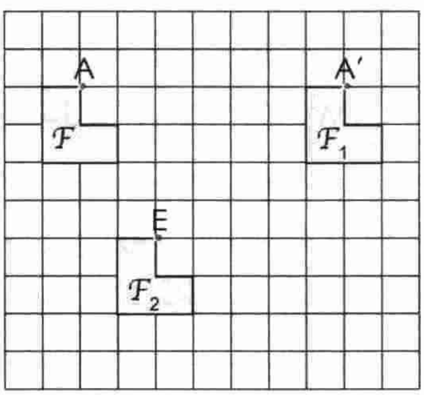
اتجاهه هو الاتجاه من A إلى A′.

الطول AA′ يساوي الطول CC′ ...

- عيّن كل الانسحابات الأخرى بتعيين المنحى، الاتجاه و الطول.
- سجّل الاختلافات (المنحى، الاتجاه أو الطول).

النشاط 2

لاحظ الشكل المقابل.



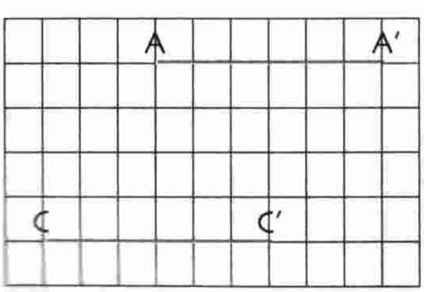
A تحول إلى A′ بواسطة انسحاب و أيضا B تحول إلى B′ بواسطة انسحاب.

- قارن بين هذين الإنسحابين.
- ما هي صورة الشكل $\mathcal{F}$ بكل من هذين الإنسحابين ؟
- قارن أيضا الانسحابين التاليين : الانسحاب الذي يحول B إلى K و الإنسحاب الذي يحول C إلى G.
- هل كل منهما يعطي نفس الصورة للشكل $\mathcal{F}$ ؟

النشاط 2

1 • لا حظ الشكل المقابل

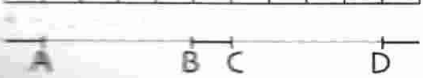
نعتبر الإنسحابين : الانسحاب الذي يحول A إلى A′ و الانسحاب الذي يحول C إلى C′.



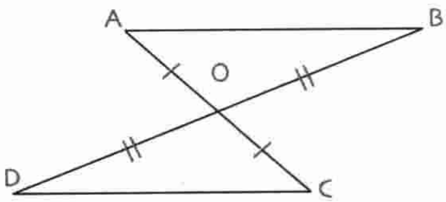
- قارن بينهما كما في النشاط الأول.
- ما نوع الرباعي AA′C′C؟ بين أن للقطعتين [AC′] و [A′C] نفس المنتصف.

2 • في الشكل المقابل AB = CD.

- بيّن أن الانسحاب الذي يحول A إلى B هو الانسحاب الذي يحول C إلى D.
- بيّن أن للقطعتين [AD] و [BC] نفس المنتصف.



أنشطة

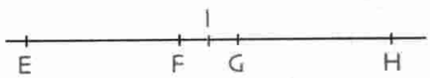


3 • في الشكل المقابل، نلاحظ أن للقطعتين [AC] و [BD] نفس المنتصف O.

• عيّن الانسحاب الذي يحول A إلى B و الانسحاب الذي يحول D إلى C.

• قارن بينهما.

نفس الأسئلة بالنسبة إلى الانسحاب الذي يحول A إلى D
و الانسحاب الذي يحول B إلى C.



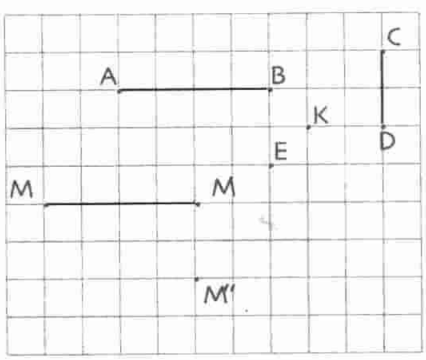
4 • في الشكل المقابل، نلاحظ أن للقطعتين [EH] و [FG] نفس المنتصف I.

• عيّن الانسحاب الذي يحوي E إلى F و الانسحاب الذي يحول G إلى H.

• قارن بينهما.

• نفس الأسئلة بالنسبة إلى الانسحاب الذي يحول F إلى H و الانسحاب الذي يحول E إلى G.

النشاط 4



1 • لاحظ الشكل المقابل.

نطبق الانسحاب الذي يحول A إلى B، فيحول M إلى M'.

نتبع هذا الانسحاب بتطبيق الإنسحاب الذي يحول C إلى D

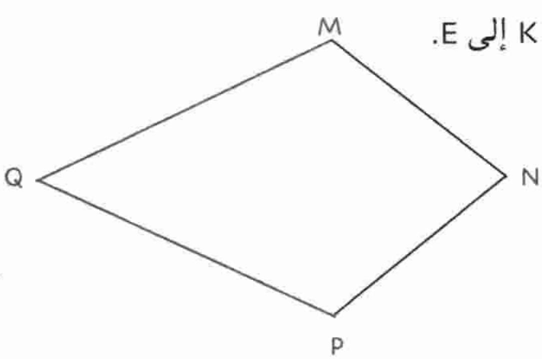
فيحول B إلى E وM' إلى M".

إن تركيب الانسحابين بهذا الترتيب يحول A إلى E و M إلى M".

• بيّن أن الرباعي AEM" M متوازي أضلاع.

• نعتبر الانسحاب الذي يحول A إلى E. ما هي صورة M بهذا الإنسحاب ؟

• استنتج أنه الانسحاب الناتج عن تركيب الانسحابين السابقين.



نطبق الانسحاب الذي يحول A إلى K و نتبعه بالانسحاب الذي يحول K إلى E.

فما هو الانسحاب الناتج ؟

• استنتج أن مركب انسحابين هو انسحاب و أن كل ثلاث نقط تعين مركب انسحابين.

2 • لاحظ الشكل المقابل.

• أكمل الجملتين التاليتين :

• الانسحاب الذي يحول M إلى N متبوع بالانسحاب الذي يحول N إلى P هو الانسحاب الذي يحول M إلى ...

• الانسحاب الذي يحول M إلى Q متبوع بالانسحاب الذي يحول Q إلى P هو الانسحاب الذي يحول M إلى ...

• قارن بين الانسحابين المحصل عليهما في التركيبين.

الدرس

معارف

1 - مفهوم الشعاع

• الإنسحاب و الشعاع

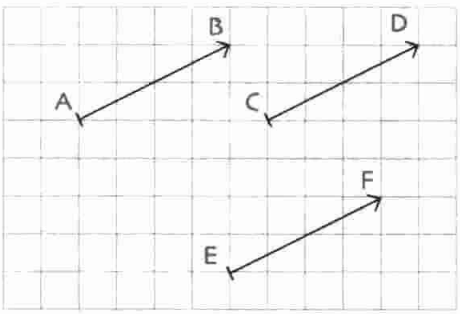
• A و B نقطتان متمايزتان. النقطتان A و B تعينان المستقيم (AB) و تعينان أيضا اتجاهين عليه، متعاكسين (من A نحو B و من B نحو A) و تحديد الطول AB.

نقول عن كل مستقيم يوازي (AB) إنه من نفس منحى المستقيم (AB).

الانسحاب الذي يحول A إلى B معرف بمنحى (هو منحى (AB)) و اتجاه (هو الاتجاه من A إلى B) و مسافة (هو طول القطعة [AB]).

نقول إن الانسحاب الذي يحول A إلى B معرف بالشعاع $\overrightarrow{AB}$.

مثال



• الانسحاب الذي يحول A إلى B يحول C إلى D و E إلى F.

• للسمتقيمات (AB)، (CD) و (EF) نفس المنحى.

• الاتجاه من C نحو D و من E نحو F هو الاتجاه من A نحو B.

• $AB = CD = EF$

كل من الأشعة $\overrightarrow{AB}$، $\overrightarrow{CD}$، $\overrightarrow{EF}$ تعرف نفس الانسحاب.

نتيجة

الشعاع $\overrightarrow{AB}$ المرفق بانسحاب معرف بـ :

• منحى الشعاع $\overrightarrow{AB}$: هو منحى المستقيم (AB).

• اتجاه الشعاع $\overrightarrow{AB}$: من A نحو B (A هي مبدأ الشعاع $\overrightarrow{AB}$ و B هي نهايته).

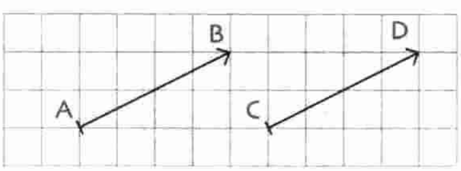
• طول الشعاع $\overrightarrow{AB}$: هو الطول AB.

1 - الشعاعان المتساويان

• الشعاعان المتساويان و الإنسحاب

تعريف

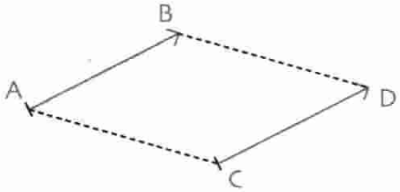
A، B، C، D أربع نقط. نقول إن الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{CD}$ متساويان إذا كانت D هي صورة C بالانسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{AB}$. نكتب $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.



ينتج أن لشعاعين متساويين
• نفس المنحى.
• نفس الاتجاه.
• نفس الطول.

الدرس

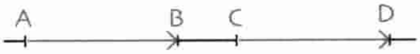
• الشعاعان المتساويان و متوازي الأضلاع



خاصية A، B، C، D أربع نقط.

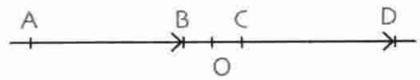
• إذا كان $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ فإن ABDC متوازي أضلاع.

• إذا كان ABDC متوازي أضلاع فإن $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.



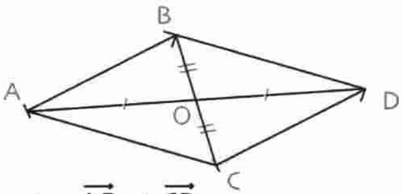
ملاحظة إذا كانت النقط A، B، C، D على استقامة واحدة و $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ فنقول أيضا إن الرباعي ABDC متوازي الأضلاع.

نظرية $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ يعني أن للقطعتين [AD] و [BC] نفس المنتصف.



$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ يعني

للقطعتين [AD] و [BC] نفس المنتصف.



$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ يعني

للقطعتين [AD] و [BC] نفس المنتصف.

• الشعاعان المتساويان و منتصف قطعة

خاصية A، B، I ثلاث نقط.

• إذا كان I منتصف [AB] فإن $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB}$.

• إذا كان $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB}$ فإن I منتصف [AB].

$\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB}$ يعني أن I هو منتصف [AB]،

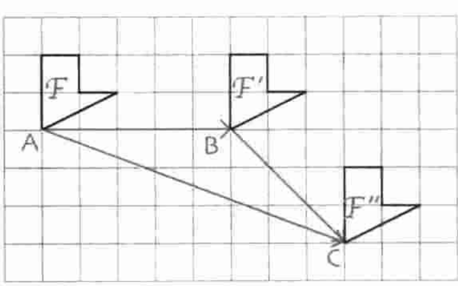
3 - مركب انسحابين - مجموع شعاعين

أ • مركب انسحابين

$\mathcal{F}$، $\mathcal{F}'$، $\mathcal{F}''$ ثلاثة أشكال.

خاصية إذا كان $\mathcal{F}'$ صورة $\mathcal{F}$ بالانسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{AB}$ و $\mathcal{F}''$ صورة $\mathcal{F}'$ بالانسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{BC}$ فإن $\mathcal{F}''$ هو صورة $\mathcal{F}$ بالانسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{AC}$.

الانسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{AB}$ متبوع بالانسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{BC}$ يعين إنسحابا هو الانسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{AC}$ ، و يسمى مركب الانسحابين المعرفين بالشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ على الترتيب.



ب • مجموع شعاعين

تعريف A، B، C ثلاث نقط. مجموع الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{BC}$ هو الشعاع $\overrightarrow{AC}$.

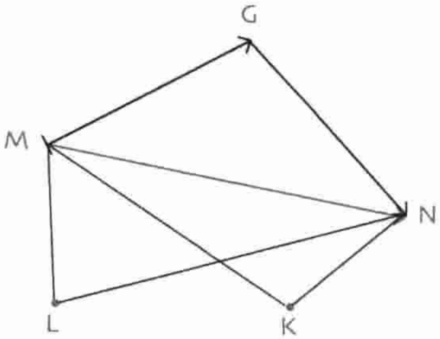
نكتب $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$

• نقول إن الشعاع $\overrightarrow{AC}$ هو مجموع الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{BC}$.

• لاحظ أن نهاية الشعاع $\overrightarrow{AB}$ هي مبدأ الشعاع $\overrightarrow{BC}$.

• المساواة $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ تسمى علاقة شال.

مثال   **يمكن تفكيك كل شعاع $\overrightarrow{MN}$ إلى مجموع شعاعين بحيث يكون مبدأ الشعاع الثاني هو نهاية الشعاع الأول.**



من أجل كل نقطة G ؛ $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GN}$.

من أجل كل نقطة K ؛ $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MK} + \overrightarrow{KN}$

من أجل كل نقطة L ؛ $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{ML} + \overrightarrow{LN}$

جـ. حالة خاصة : الشعاع المعدوم ـ الشعاعان المتعاكسان

• **حسب علاقة شال نكتب** $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AA}$

الانسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{AB}$ يحول A إلى B و الانسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{BA}$ يحول B إلى A.

الانسحاب الذي يحول A إلى B متبوع بالانسحاب الذي يحول B إلى A هو الانسحاب الذي يحول A إلى A حيث شعاعه هو $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA}$ أي $\overrightarrow{AA}$. إذن النقطة A لا تحول بهذا الانسحاب المركب.

نقول إن شعاع هذا الانسحاب المركب هو الشعاع المعدوم، يرمز له بالرمز $\overrightarrow{0}$.

نكتب : $\overrightarrow{AA} = \overrightarrow{BB} = \overrightarrow{CC} = \overrightarrow{0}$

لدينا : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AA} = \overrightarrow{0}$ **نقول أن الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{BA}$ متعاكسان.**

نكتب $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$ **و** $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$ **و نقرأ :** $\overrightarrow{AB}$ **معاكس** $\overrightarrow{BA}$ **و** $\overrightarrow{BA}$ **معاكس** $\overrightarrow{AB}$.

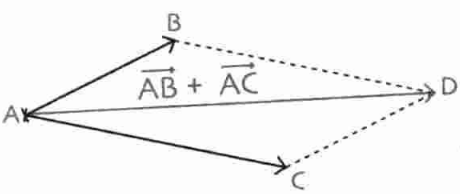
ملاحظة $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{0} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BB} = \overrightarrow{AB}$ **إذن** $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{0} = \overrightarrow{AB}$.

د. مجموع شعاعين و قاعدة المتوازي الأضلاع

C ، B ، A ثلاث نقط.

خاصية   **إذا كانت D نقطة تحقق $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}$ فإن هذه النقطة هي الرأس الرابع لمتوازي الأضلاع ABDC.**

البرهان   **لتكن D نقطة بحيث** $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}$

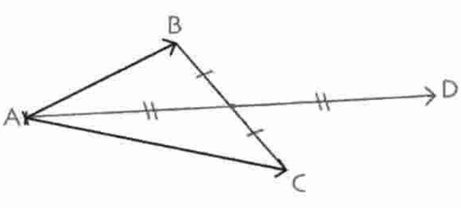


نعلم أن $\overrightarrow{CA} = -\overrightarrow{AC}$ **و** $\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{CD}$

إذن $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AD}$ **أي** $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{0} = \overrightarrow{CD}$

و بالتالي $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ **أي الرباعي ABDC متوازي الأضلاع.**

ملاحظة   **قطرا متوازي الأضلاع متناصفان.**
و بالتالي يمكن الحصول عل النقطة D
برسم نظيرة A بالنسبة إلى منصف [BC].

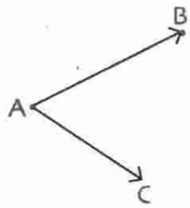


طرائق

1 - إنشاء ممثل لمجموع شعاعين

طريقة لإنشاء ممثل لمجموع شعاعين، نستعمل علاقة شال أو قاعدة متوازي الأضلاع.

تمرين D ،C ،B ،A أربع نقط. أنشئ النقطة K بحيث $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{DK}$.



حل 1 لدينا : $\overrightarrow{DK} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.

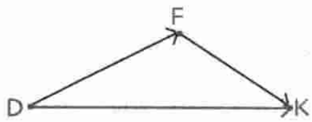
بوضع $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DF}$ و $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{FK}$

(نهاية الشعاع $\overrightarrow{DF}$ هي مبدأ الشعاع $\overrightarrow{FK}$)

ينتج أن $\overrightarrow{DK} = \overrightarrow{DF} + \overrightarrow{FK} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$

إذن الشعاع $\overrightarrow{DK}$ هو ممثل للشعاع $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$

و الذي مبدأه D و نهايته K.



$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DF}$

$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{FK}$

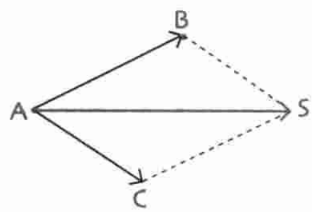
حل 2 حسب قاعدة متوازي الأضلاع

لدينا : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AS}$.

ABSC متوازي أضلاع إذن $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AS}$.

لإنشاء النقطة K، يكفي إنشاء الشعاع $\overrightarrow{DK}$

حيث $\overrightarrow{AS} = \overrightarrow{DK}$.



$\overrightarrow{DK} = \overrightarrow{AS} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$

2 - إستعمال تساوي شعاعين لإنجاز برهان

طريقة يمكن إستعمال تساوي شعاعين في برهان بربط تساوي شعاعين بمتوازي الأضلاع.

تمرين 1 ABCD متوازي أضلاع و $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{CF}$. برهن أن الرباعي ADFE متوازي أضلاع.

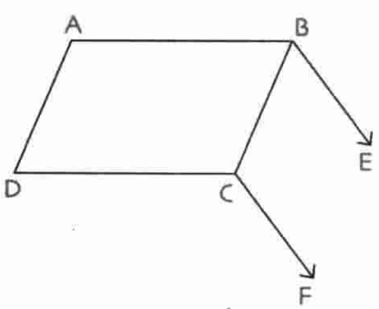
حل للبرهان أن ADFE متوازي أضلاع يكفي البرهان أن $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{EF}$.

لدينا : $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ لأن ABCD متوازي أضلاع.

و لدينا: $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{CF}$ إذن BEFC متوازي أضلاع. و بالتالي $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{EF}$

$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$ و $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{EF}$ إذن $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{EF}$

و بالتالي ADFE متوازي أضلاع.



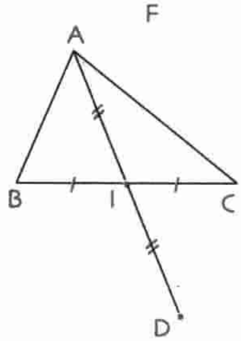
تمرين 2 ABC مثلث، I منتصف [BC]، D نقطة بحيث $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{ID}$.

برهن أن $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.

حل $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{ID}$ يعني I منتصف [AD].

I منتصف [BC] و I منتصف [AD].(القطران متناصفان)

إذن الرباعي ACDB متوازي أضلاع.



تمارين محلولة

تمرين 1 ABC مثلث. الانسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{BC}$ يحول C إلى M. الانسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{BM}$ يحول A إلى P. الانسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{AC}$ يحول C إلى K.

1 • ارسم الشكل مبرزا كل مراحل الإنشاء.

2 • برهن أن النقط P، M، K على استقامة واحدة.

حل 1 • M هي صورة C بالإنسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{BC}$. إذن $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{CM}$ أي M نظيرة B بالنسبة إلى C.

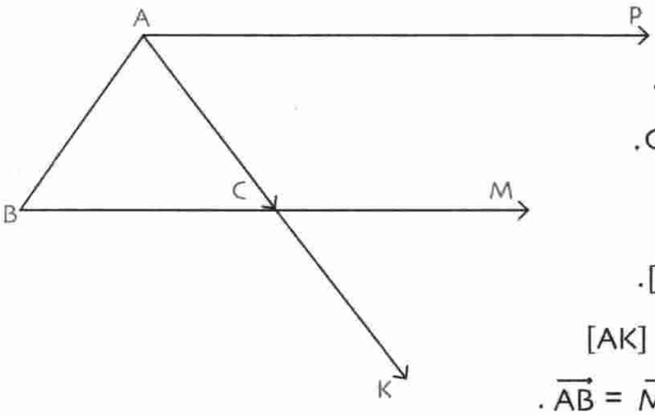
P هي صورة A بالإنسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{BM}$. إذن $\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AP}$

و بالتالي BMPA متوازي أضلاع.

K هي صورة C بالإنسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{AC}$.

إذن $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CK}$ أي K نظيرة A بالنسبة إلى C.

و بهذه الكيفية نتحصل على الشكل التالي :



2 • لدينا $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{CM}$ إذن C منتصف [BM].

و لدينا $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CK}$ و بالتالي C منتصف [AK]

إذن [AK] و [BM] متناصفان و بالتالي $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{MK}$.

بما أن $\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AP}$ فإن $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{PM}$ و $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{MK}$

إذن $\overrightarrow{PM} = \overrightarrow{MK}$ و بالتالي M منتصف [PK].

بما أن M منتصف [PK] فإن النقط P، M، K على استقامة واحدة.

تمرين 2 A، B، C، D و E خمس نقط بحيث : $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{EC}$ و $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{ED}$.

1 • انجز شكلا.

2 • ما نوع الرباعي ABCD ؟ علل إجابتك.

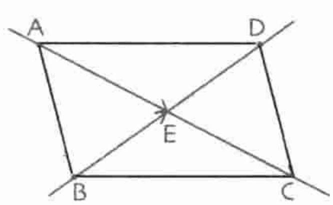
3 • عيّن النقطة F بحيث $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$ و النقطة K بحيث $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BK}$.

حل 1 • $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{ED}$ يعني E منتصف [BD] أي D نظيرة B بالنسبة إلى E.

و كذا $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{EC}$ يعني C نظيرة A بالنسبة إلى E.

إذن يكفي اختيار A، B، E ثم انشاء C و D بحيث

تكون D نظيرة B بالنسبة إلى E و C نظيرة A بالنسبة إلى E.



2 . القطعتان [AC] و [BD] لهما نفس المنتصف، إذن ABCD متوازي الأضلاع، قطراه هما [AC] و [BD].

3 . لدينا $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$

حسب قاعدة متوازي الأضلاع ينتج أن الرباعي ABFD متوازي الأضلاع.

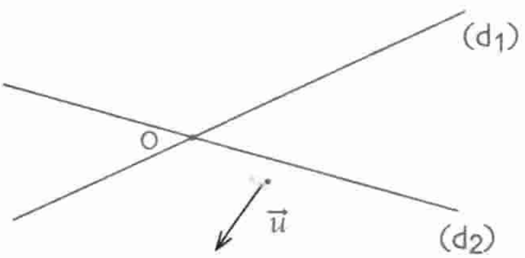
لدينا أيضا $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$ إذن $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AC}$. ينتج أن F منطبقة على C.

بنفس الطريقة نبرهن أن النقطة K التي تحقق $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BK}$ هي D.

لدينا $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BD}$ و $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BK}$ إذن $\overrightarrow{BK} = \overrightarrow{BD}$ و بالتالي K تنطبق على D .

تمرين 3 إليك الشكل حيث (d_1) و (d_2) مستقيمان متقاطعان في النقطة O و $\vec{u}$ شعاع.

انشئ نقطة A من (d_1) و نقطة B من (d_2) بحيث $\vec{u} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$.



حل مبدأ الشعاع $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$ هو النقطة O

و حسب قاعدة متوازي الأضلاع فإن نهايته هي النقطة C

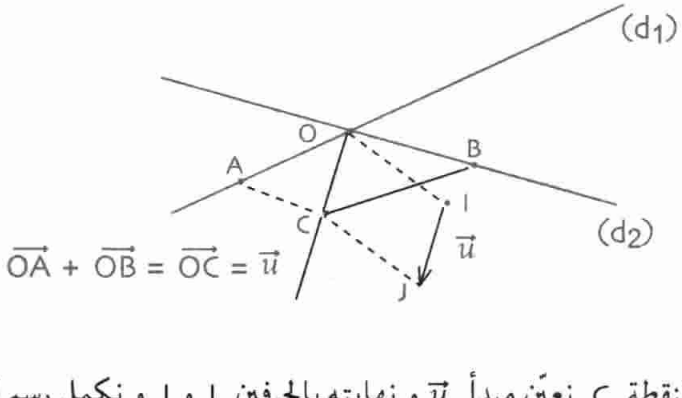
بحيث الرباعي OACB متوازي الأضلاع.

أي C هي الرأس الرابع لمتوازي الأضلاع،

عُلِمت ثلاثة من رأوسه. يكفي إذن رسم الشعاع $\overrightarrow{OC}$

بحيث $\overrightarrow{OC} = \vec{u}$ ثم إتمام رسم متوازي الأضلاع للحصول على النقطتين A و B

بحيث حاملا [OA] و [OB] هما (d_1) و (d_2) على الترتيب.

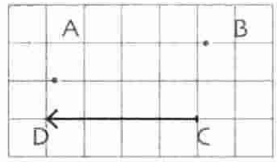


للحصول على النقطة C نعيّن مبدأ $\vec{u}$ و نهايته بالحرفين I و J و نكمل رسم المتوازي الأضلاع OIJC.

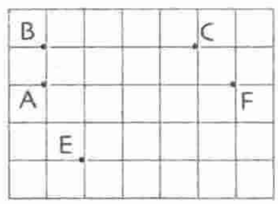
صحيح أو خاطئ

1 1. B هي صورة A بالإنسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{CD}$.
إذن $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.

2. في الشكل التالي : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.



3. النقطة O منتصف [AB]. إذن $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OB}$.
4. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ إذن ABDC متوازي أضلاع.
5. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ إذن $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$.
6. $\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EF}$ يساوي $\overrightarrow{FA}$.
7. ABCD متوازي أضلاع إذن $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BD}$
8. في الشكل الموالي :
$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{EF}$



تمارين

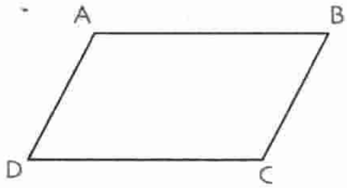
تساوي شعاعين

2 أكمل الجدول التالي :

التعبير بشعاع	التعبير بمتوازي أضلاع	التعبير بإنسحاب
$\overrightarrow{.A} = \overrightarrow{E.}$	الرباعي BA.. متوازي أضلاع	A صورة B و F صورة E
$\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{KL}$	الرباعي IJ.. متوازي أضلاع	J صورة .... L صورة ....
$\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{..}$	الرباعي EFGH متوازي أضلاع	.... صورة E .... صورة F

3 ABC مثلث.
- أنشئ النقطة D بحيث $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.
- أذكر متوازي الأضلاع الناتج ؟

4 ABCD متوازي أضلاع.

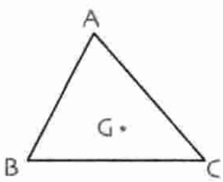


أكمل :
- صورة A بالانسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{BC}$ هي النقطة .....
- C هي صورة D بالانسحاب الذي شعاعه .....
- صورة النقطة C هي B بالانسحاب الذي شعاعه .....

5 EFG مثلث.
- عيّن النقط I، J، K بحيث :

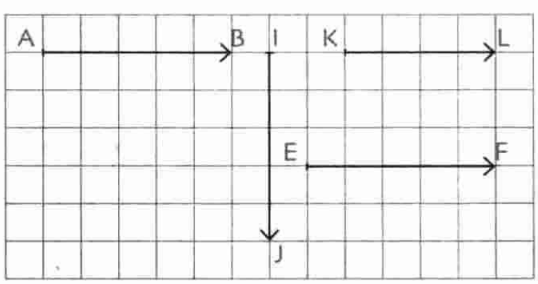
$\overrightarrow{EG} = \overrightarrow{GI}$ ، $\overrightarrow{FG} = \overrightarrow{GJ}$ و $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{FK}$

6 ABC مثلث و G نقطة.
- أنشئ النقطتين I، J بحيث :
$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{IG}$ و $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{JG}$.

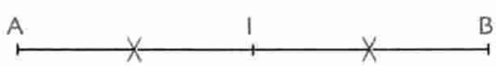


7 لاحظ الشكل التالي :
- عيّن الأشعة غير المساوية للشعاع $\overrightarrow{AB}$.

علل إجابتك مستعملا المنحى، أو الاتجاه أو الطول.



8 I هي منتصف القطعة [AB]. أكمل :
- صورة A بالانسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{IB}$ هي ....
- B هي صورة النقطة .... بالانسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{AI}$.



9 لاحظ الشكل التالي :

- أنشئ النقطة G بحيث $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{FG}$

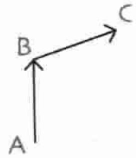
و النقطة K صورة F بالانسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{GF}$.

10 ABC مثلث.

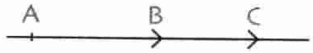
• أنشئ صورة المثلث ABC بالانسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{AB}$ و صورته بالانسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{BC}$.

مجموع شعاعين و علاقة شال

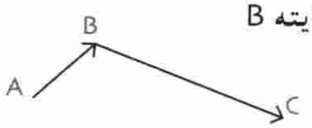
11 • أنشئ الممثل الذي مبدأه C للشعاع $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$ الذي مبدأه C.



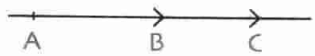
12 • أنشئ الممثل الذي مبدأه C للشعاع $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$.



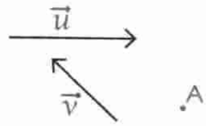
13 • أنشئ الممثل الذي نهايته B للشعاع $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$.



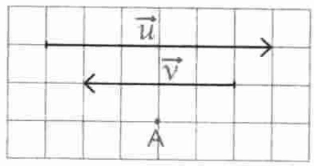
14 • أنشئ الممثل الذي نهايته B للشعاع $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$.



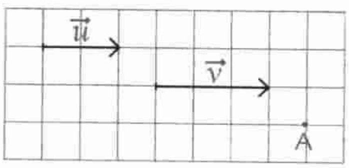
15 • أنشئ الممثل الذي مبدأه A للشعاع $\vec{u}+\vec{v}$.



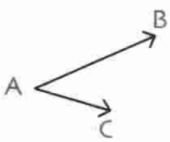
16 • أنشئ الممثل الذي مبدأه A للشعاع $\vec{u}+\vec{v}$.



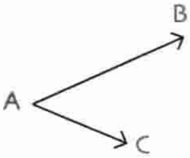
17 • أنشئ الممثل الذي نهايته A للشعاع $\vec{u}+\vec{v}$.



18 • أنشئ الممثل الذي مبدأه O للشعاع $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$.



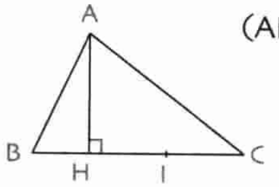
19 • أنشئ الممثل الذي نهايته A للشعاع $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$.



مسائل

20 ABC مثلث، [AH] عمود و I منتصف [HC].

• برهن أن صورة المستقيم (AH) بالانسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{HI}$ تشمل منتصف [AC].



21 ABC مثلث، I و J منتصفا [AB] و [AC] على الترتيب.

1 • أنشئ المثلث FEG صورة ABC بالانسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{IJ}$ حيث E ، F ، G صور A ، B ، C على الترتيب بهذا الانسحاب.

2 • برهن أن BF = FC = CG .

22 ABC مثلث.

• أنشئ $\overrightarrow{AD}$ الممثل الذي مبدأه A للشعاع $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$

• أكمل : $\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CD}= ....$

$\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BD}= ....$

علل إجابتك.

23 ABC مثلث.

• أنشئ النقطتين I و J بحيث $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{IC}$ و $\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{JA}$.

• ماذا تلاحظ ؟ علل إجابتك.

24 ABC مثلث.

E نقطة بحيث $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BE}$.

• أنشئ $\overrightarrow{ED}$ ممثلا للشعاع $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}$.

• برهن أن $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$.

25 ABC مثلث.

• أنشئ النقطة E بحيث $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BE}$.

• أنشئ $\overrightarrow{BD}$ ممثلا للشعاع $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$.

• برهن أن $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{ED}$.

12

المعالم

1 - إحداثيا شعاع في المستوي المزود بمعلم
2 - حساب المسافة بين نقطتين في معلم متعامد و متجانس

René Descartes
(1596 - 1650)

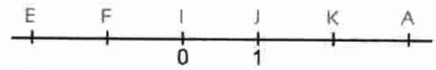
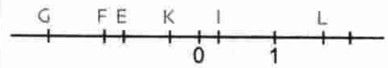
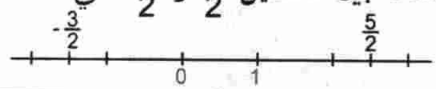
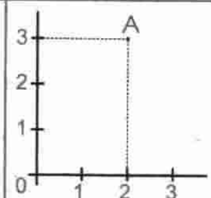
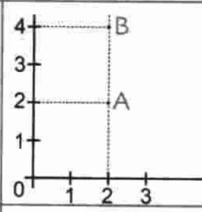
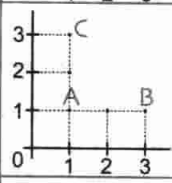
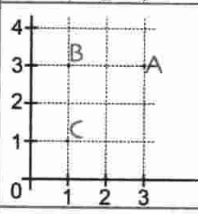
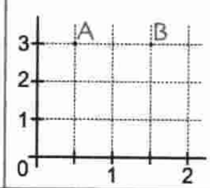
توجد وضعيات كثيرة في الرياضيات تستدعي اختيار معلم يسمح بمعالجتها الوضعية و إجراء حسابات كما أن اختيار معلم لا بد أن يكون مناسبا للوضعية التي تطرح للمعالجة و ذلك قصد حل مشاكل من الواقع و في مجالات مختلفة (صناعة، ملاحة...).
من بين الرياضياتيين الذين اقترحوا معالم تسمح بحل مشكل عن طريق إجراء الحسابات هو الرياضياتي و الفيلسوف ديكارت.

الكفاءات المستهدفة
(التي يجب اكتسابها)

- قراءة إحداثيي شعاع في معلم.
- تمثيل شعاع بمعرفة إحداثييه.
- حساب إحداثيي شعاع بمعرفة مبدإ أو نهاية ممثله.
- حساب إحداثيي منتصف قطعة بمعرفة إحداثيي كل من طرفيها.
- حساب المسافة بين نقطتين في معلم متعامد و متجانس.

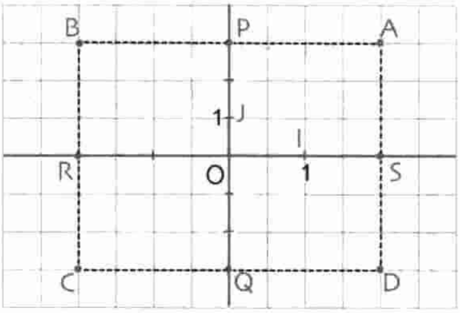
استبيان متعدد الإجابات

اختر الإجابة الصحيحة.

السؤال	الإجابة 1	الإجابة 2	الإجابة 3
1 • في المستقيم المدرج الموالي، فاصلة النقطة A هي … 	2	3	4
2 • النقطة التي فاصلتها 2- على المستقيم المدرج الموالي هي النقطة 	E	F	G
3 • المسافة بين العددين $\frac{5}{2}$ و $-\frac{3}{2}$ هي … 	4	- 4	5
4 • في المعلم الموالي … 	فاصلة A هي 3 و ترتيبها هو 2.	فاصلة A هي 2 و ترتيبها هو 3.	فاصلة A هي $\frac{2}{3}$ و ترتيبها هو $\frac{3}{2}$.
5 • في المعلم الموالي النقطتان A و B لهما … 	نفس الترتيب.	نفس الفاصلة.	نفس الفاصلة و نفس الترتيب.
6 • النقطتان اللتان لهما نفس الترتيب هما النقطتان … 	A و C	B و C	A و B
7 • في المعلم الموالي، النقطتان اللتان لهما نفس الفاصلة هما النقطتان … 	A و B	A و C	C و B
8 • في المعلم الموالي، المسافة بين A و B بالتوازي مع محور الفواصل هي … 	3	1	0

أنشطة تحضيرية

النشاط 1



لاحظ المعلم الذي مبدأه O، محوراه متعامدان، فهو معلم متعامد.

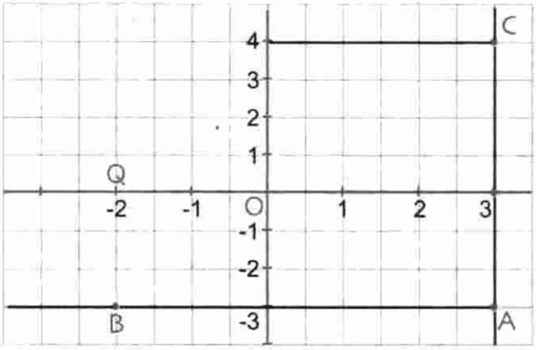
1 • عيّن محور الفواصل و محور التراتيب.

2 • ما هي إحداثيا (الفاصلة و الترتيب) النقطة A ؟

نفس السؤال بالنسبة إلى النقط B، C و D.

3 • عيّن فواصل و تراتيب كل من النقط I، J، O، P، Q، R و S.

النشاط 2



لاحظ المعلم الذي مبدأه O.

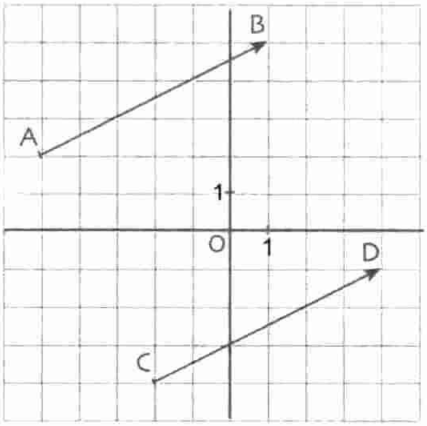
1 • ما هي المسافة بين العددين 3 و 2- من محور الفواصل ؟

2 • ما هي المسافة بين 3- و 4 من محور التراتيب ؟

3 • ما هي المسافة بين A و B ؟ (لاحظ أن (AB) يوازي محور الفواصل).

4 • ما هي المسافة بين A و C ؟ (لاحظ أن (AC) يوازي محور التراتيب).

النشاط 3



لاحظ المعلم و الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{CD}$.

نسمي x_A، x_B، x_C و x_D فواصل A، B، C و D على الترتيب

و y_A، y_B، y_C و y_D تراتيب A، B، C و D على الترتيب.

1 • أكمل الجدولين التاليين:

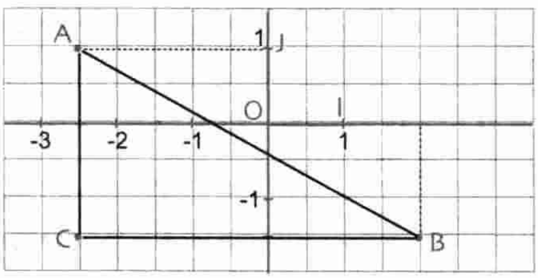
x_A	x_B	x_C	x_D	$x_B - x_A$	$x_D - x_C$
.....	.....	.....	.....	.....	.....

y_A	y_B	y_C	y_D	$y_B - y_A$	$y_D - y_C$
.....	.....	.....	.....	.....	.....

2 • قارن بين الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{CD}$ (أي بين مركبي الانسحابين الذين شعاعيهما على الترتيب هما $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{CD}$).

قارن بين $(x_B - x_A)$ و $(x_D - x_C)$ من جهة و $(y_B - y_A)$ و $(y_D - y_C)$ من جهة أخرى. ماذا تستنتج ؟

النشاط 4



لاحظ المعلم الذي مبدأه O بحيث OI = OJ.

أكمل : CA = ...

CB = ...

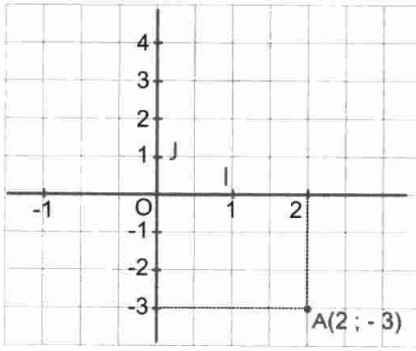
بما أن المثلث ACB قائم في C فإن : AB^2 = ...

معارف

1 - إحداثيا شعاع في المستوي المزود بمعلم

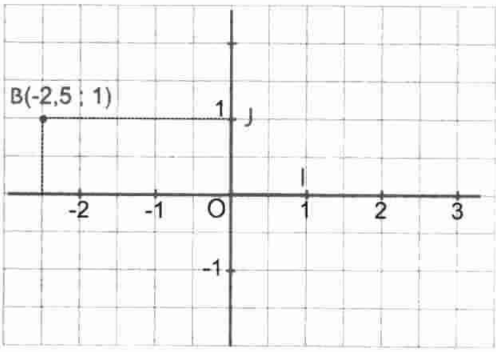
أ • احداثيا نقطة في المستوي المزود بمعلم

المستوي مزود بمعلم متعامد و غير متجانس. OJ ≠ OI.



• إحداثيا النقطة A : فاصلة A هي 2 و ترتيب A هو 3- . نكتب (3- ; 2)A

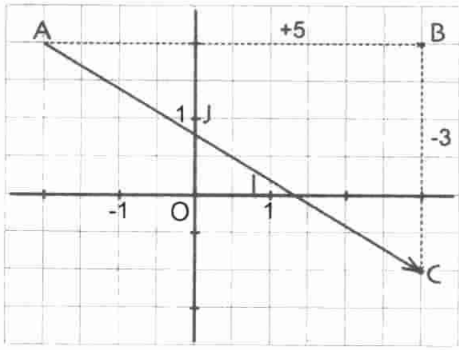
المستوي مزود بمعلم متعامد و متجانس. OJ = OI.



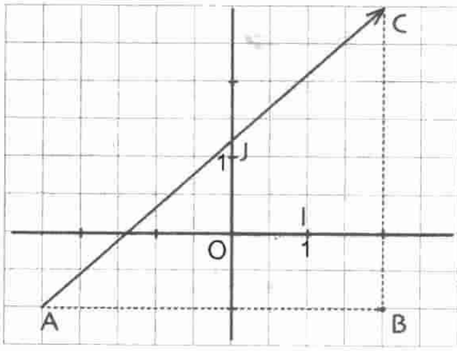
• إحداثيا النقطة B: فاصلة B هي 2,5- و ترتيب B هو 1. نكتب (1 ; 2,5-)B.

ب • احداثيا شعاع في معلم

المستوي مزود بمعلم حيث الاتجاه الموجب على المستقيم (OI) هو من O نحو I و الاتجاه الموجب على المستقيم (OJ) هو من O نحو J.



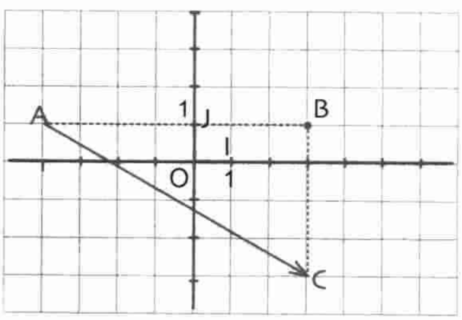
• إحداثيا الشعاع $\overrightarrow{AC}$: نزيح النقطة A حتى النقطة B بالتوازي مع المستقيم (OI) في الاتجاه الموجب و بخمس وحدات، ثم نزيح بثلاث وحدات النقطة B حتى النقطة C بالتوازي مع المستقيم (OJ) في الاتجاه السالب.



• إحداثيا الشعاع $\overrightarrow{AC}$ هما (4 ; 4,5) نكتب $\overrightarrow{AC}$ (4 ; 4,5).

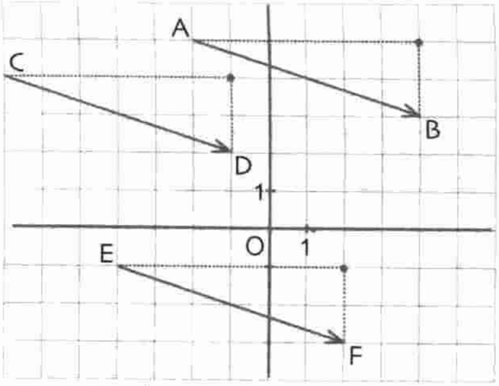
نقرأ إحداثيا الشعاع $\overrightarrow{AC}$ في المعلم و هما (3- ; 5) و نكتب $\overrightarrow{AC}$ (3- ; 5) .

ملاحظة 1 يمكن تعيين الاتجاه الموجب بسهم على كل من المستقيمين المعينين للمعلم. للتنقل من النقطة A إلى النقطة C نتنقل من A إلى B ثم من B إلى C، نقرأ إحداثيي الشعاع $\overrightarrow{AC}$، و نكتب (4- ; 7) $\overrightarrow{AC}$.



ملاحظة 2 الانسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{AC}$ هو الإنسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{AB}$ متبوع بالانسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{BC}$ أي $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$.

ج. إحداثيا شعاعين متساوين



المستوي مزود بمعلم

خاصية $\overrightarrow{AB}(x\,;y)$ و $\overrightarrow{CD}(x'\,;y')$ شعاعان.

- إذا كان $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$ فإن $x=x'$ و $y=y'$.
- إذا كان $x=x'$ و $y=y'$ فإن $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$.

مثال في الشكل المقابل، نقرأ $\overrightarrow{AB}(6\,;-2)$ ، $\overrightarrow{CD}(6\,;-2)$ ، $\overrightarrow{EF}(6\,;-2)$ نكتب : $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{EF}$.

د. حساب إحداثيي شعاع علم مبدأه و نهايته

المستوي مزود بمعلم

خاصية إذا كان $A(x_A\,;y_A)$ و $B(x_B\,;y_B)$ نقطتين فإن إحداثيا الشعاع $\overrightarrow{AB}$ هما $(x_B-x_A\,;\,y_B-y_A)$.

مثال $A(5\,;3)$ و $B(2\,;1)$ نقطتان من المستوي المزود بمعلم.
لدينا : $x_B-x_A=2-5=-3$ و $y_B-y_A=1-3=-2$ إذن $\overrightarrow{AB}(-3\,;\,-2)$.

ملاحظة معاكس كل من (x_B-x_A) و (y_B-y_A) هما على الترتيب (x_A-x_B) و (y_A-y_B) و هما إحداثيا $\overrightarrow{BA}$. أي إحداثيا $\overrightarrow{BA}$ هما معاكسا إحداثيي $\overrightarrow{AB}$ على الترتيب.

هـ. حساب إحداثيي منتصف قطعة مستقيم علم إحداثيا طرفيها

خاصية $A(x_A\,;y_A)$ و $B(x_B\,;y_B)$ نقطتان.
إذا كان I منتصف [AB] فإن إحداثيي I هما $(x_I\,;y_I)$ بحيث $x_I=\dfrac{x_A+x_B}{2}$ و $y_I=\dfrac{y_A+y_B}{2}$.

مثال $A(-3\,;+2)$ و $B(-7\,;6)$ نقطتان. إحداثيا النقطة I منتصف [AB] هما $(x_I\,;y_I)$ بحيث :
$x_I=\dfrac{-3-7}{2}=-5$ و $y_I=\dfrac{2+6}{2}=4$ ، نكتب : B(-5; 4).

2 - المسافة بين نقطتين في معلم متعامد و متجانس

المستوي مزود بمعلم متعامد و متجانس.

خاصية إذا كان $A(x_A\,;y_A)$ و $B(x_B\,;y_B)$ نقطتين فإن المسافة بين النقطتين A و B هي :

$$AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}$$

مثال $A(2\,;5)$ و $B(-1\,;1)$ نقطتان.
لدينا $x_B-x_A=-1-2=-3$ و $y_B-y_A=1-5=-4$ ؛ $(x_B-x_A)^2=(-3)^2=9$
و $(y_B-y_A)^2=(-4)^2=16$ إذن $(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2=9+16=25$.
و بالتالي $AB=\sqrt{25}$ أي $AB=5$.

طرائق

1 - تمثيل شعاع بمعرفة إحداثييه

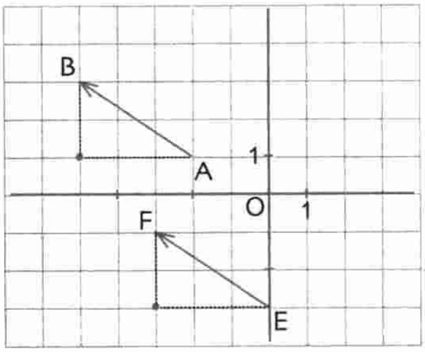
خاصية لتمثيل شعاع علمت إحداثياه، نختار المبدأ و ننجز انسحاب أول وفق محور الفواصل ثم نتبعه بانسحاب ثان وفق محور التراتيب بقدر الأطوال المرفقة بالانسحابين و في الاتجاه المناسب.

تمرين 1 المستوى مزود بمعلم. أنشئ ممثلين للشعاع $\vec{u}\,(-3\,;+2)$.

حل • 1 رسم $\overrightarrow{AB}$ بحيث $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$. نختار المبدأ A ثم ننشئ النهاية B للحصول على ممثل أول.

بما أن 3- سالب و 2 موجب فنقوم بالانسحاب موازيا لمحور الفواصل في الاتجاه السالب بطول 3 وحدات

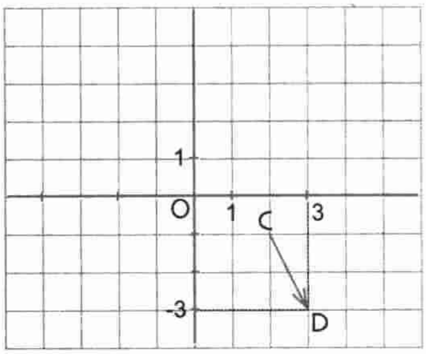
ثم نقوم بإزاحة النقطة المحصل عليها بالانسحاب الثاني موازيا لمحور التراتيب في الاتجاه الموجب و بالطول 2.



• 2 رسم $\overrightarrow{EF}$ بحيث $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{EF}$. نختار المبدأ E و نعين النهاية F.

للحصول على ممثل ثان للشعاع $\vec{u}$ نكمل برسم متوازي الأضلاع ABFE (يمكن اتباع الكيفية المطبقة لرسم $\overrightarrow{AB}$).

تمرين 2 أنشئ ممثلا للشعاع $\vec{u}\,(1\,;-2)$ نهايته $D(3\,;-3)$.



حل تعيين C بحيث $\overrightarrow{CD}=\vec{u}$.

بما أن $\overrightarrow{CD}=\vec{u}$ فإن $x_D - x_C = 1$ و $y_D - y_C = -2$

أي $3 - x_C = 1$ و $-3 - y_C = -2$

و بالتالي $x_C = 2$ و $y_C = -1$

إذن إحداثيا C هما $(2\,;-1)$. نكمل بتمثيل النقطة C.

2 - اثبات أن رباعيا عرفت إحداثيات رؤوسه هو متوازي الأضلاع

طريقة لإثبات أن الرباعي ABCD متوازي الأضلاع نثبت أن $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$

(أو أن للقطرين [AC] و [BD] نفس المنتصف).

تمرين لتكن $A(0\,;1)$ ؛ $B(0\,;3)$ ؛ $C(-3\,;0)$ ؛ $D(-2\,;-3)$ أربع نقط من المستوي المزود بمعلم.

أثبت أن الرباعي ABCD متوازي الأضلاع.

حل 1 $\overrightarrow{AB}(x_B - x_A\ ;\ y_B - y_A)$ أي $\overrightarrow{AB}(1\ ;\ 3)$.
$\overrightarrow{DC}(x_C - x_D\ ;\ y_C - y_D)$ أي $\overrightarrow{DC}(1\ ;\ 3)$.
للشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{DC}$ نفس الإحداثيات إذن $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ و بالتالي ABCD متوازي الأضلاع.

حل 2 I منتصف [AC] إذن $I\left(\frac{x_A + x_B}{2}\ ;\ \frac{y_A + y_C}{2}\right)$ أي $I(-1\ ;\ 0)$

J منتصف [BD] إذن $J\left(\frac{x_B + x_D}{2}; \frac{y_B + y_D}{2}\right)$ أي $J(-1\ ;\ 0)$

نلاحظ أن للنقطتين I و J نفس الإحداثيات. إذن I و J منطبقتان و بالتالي للقطرين [AC] و [BD] نفس المنتصف. ينتج أن الرباعي ABCD متوازي الأضلاع.

3 - تعيين طبيعة مثلث في معلم متعامد و متجانس

طريقة

المستوي مزود بمعلم متعامد و متجانس. ABC مثلث علمت احداثيات رؤوسه.
لتعيين طبيعة المثلث ABC نحسب أطوال أضلاعه و نطبق الخواص المتعلقة بالمثلثات.

تمرين المستوي مزود بمعلم متعامد و متجانس.
1 • ما هي طبيعة المثلث ABC حيث $A(6\ ;-1)$ ؛ $B(2\ ;\ 3)$ ؛ $C(2\ ;-5)$ ؟
2 • إذا كانت وحدة الطول هي 1cm، احسب مساحة المثلث ABC .

حل 1 • لدينا $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{(2-6)^2 + (3+1)^2}$

و لدينا $AC = \sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2}$

$BC = \sqrt{(x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2}$

بعد التعويض و الحساب نجد $AB = \sqrt{32}$ ، $AC = \sqrt{32}$ و $BC = 8$.

نلاحظ أن AB = AC. إذن المثلث متساوي الساقين.

من جهة أخرى $AB^2 = 32$ ؛ $AC^2 = 32$ و $BC^2 = 64$.

إذن $BC^2 = AB^2 + AC^2$

و بالتالي المثلث ABC قائم في A و متساوي الساقين.

2 • المثلث ABC قائم في A.

إذن مساحته هي $\frac{1}{2} AB \times AC$ أي $\frac{1}{2}\sqrt{32} \times \sqrt{32}$

و بالتالي : مساحة المثلث ABC هي $16cm^2$.

تمرين محلول

تمرين المستوي مزود بمعلم متعامد و متجانس.

$A(0\,;2)$ ؛ $B(-4\,;0)$ ؛ $C(-2\,;-4)$ ثلاث نقط.

1. أثبت أن المستقيمين (AB) و (BC) متعامدان.
2. عيّن النقطة D حتى يكون الرباعي $ABCD$ مربعا.
3. عيّن إحداثيي مركز المربع $ABCD$.
4. احسب قطر الدائرة المحيطة بهذا المربع.

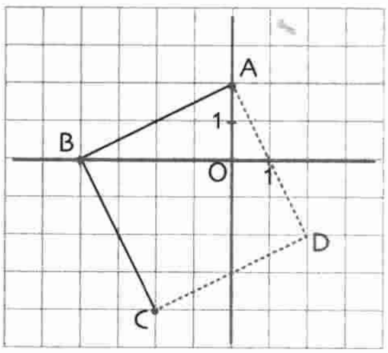
حل 1. المستقيمان (AB) و (BC) يتقاطعان في B. للبرهان أنهما متعامدان يكفي البرهان أن المثلث ABC قائم في B أي أن $BA^2 + BC^2 = AC^2$.

نعلم أن $BA^2 = (x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2$ ؛ $BC^2 = (x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2$

و $AC^2 = (x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2$

بعد التعويض و الحساب نجد : $BA^2 = 20$ ؛ $BC^2 = 20$ و $AC^2 = 40$

إذن $BC^2 + BA^2 = AC^2$



2. من السؤال السابق، لدينا $\widehat{ABC} = 90°$ و $AB = BC$

نستنتج أن : حتى يكون الرباعي $ABCD$ مربعا يكفي أن يكون $ABCD$ متوازي الأضلاع أي أن $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB}$.

لدينا $\overrightarrow{AB}(-4\,;-2)$ و $\overrightarrow{DC}(x_C - x_D\,;\ y_C - y_D)$

أي $\overrightarrow{DC}(-2 - x_D\,;-4 - y_D)$

نحل المعادلتين $-2 - x_D = -4$ و $-4 - y_D = -2$

نجد $x_D = 2$ و $y_D = -2$ أي $D(2\,;-2)$.

(يمكن التحقق على التمثيل المقابل).

3. لتكن I منصف القطعة $[AC]$ (أي قطر المربع). تعيين إحداثيي I.

لدينا $x_I = \dfrac{x_A - x_C}{2} = \dfrac{0-2}{2} = -1$ و $y_I = \dfrac{y_A + y_C}{2} = \dfrac{2-4}{2} = -1$

إذن إحداثيا I مركز المربع $ABCD$ هما $(-1\,;-1)$

4. قطر الدائرة المحيطة بالمربع هو قطر المربع أي AC.

حسب السؤال 1 لدينا : $AC^2 = 40$

نستنتج أن $AC = \sqrt{40}$ أي $AC = 2\sqrt{10}$.

إذن قطر الدائرة المحيطة بالمربع هو $2\sqrt{10}$ (بوحدة الطول المختارة).

تمارين و مسائل

المستوي مزود بمعلم متعامد و متجانس مبدأه O.

صحيح أو خاطئ

1 •1. $A(0 ; 1)$ و $B(1 ; 0)$ إذن $\overrightarrow{AB}(1 ; 1)$

•2. الشعاعان $\overrightarrow{AB}(-1 ; 0)$ و $\overrightarrow{BC}(0 ; -1)$ متساويان.

•3. $A(-1 ; -1)$ ؛ $B(-1 ; 0)$ و $C(0 ; -1)$
إذن $(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})(1 ; 0)$

•4. $\overrightarrow{AB}(-3 ; 5)$ إذن $\overrightarrow{BA}(-3 ; -5)$

•5. $A(-3 ; 0)$ ؛ $B(5 ; 0)$ و $C(1 ; 0)$
إذن : C منتصف [AB] .

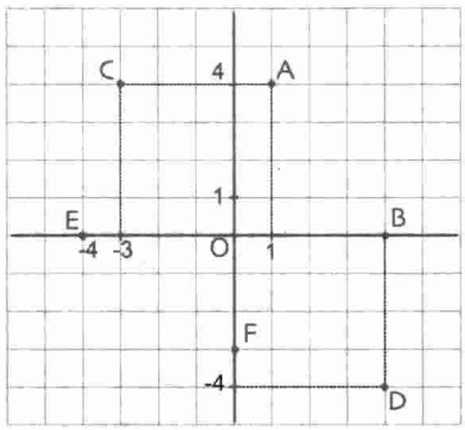
•6. فاصلة نظيرة $A(-3 ; 2)$ بالنسبة إلى المبدإ O هي 3.

•7. ترتيب نظيرة $E(5 ; 3)$ بالنسبة إلى المبدإ O هي 3.

قراءة إحداثيي شعاع

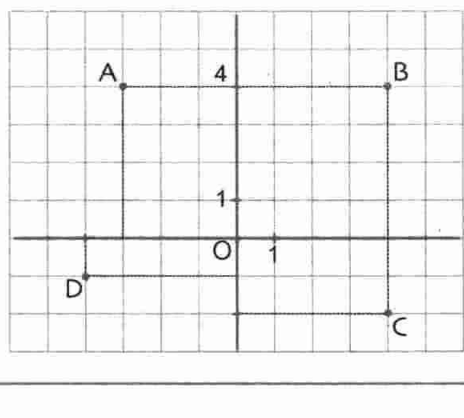
2 • إقرأ إحداثيي كل من الأشعة

$\overrightarrow{OA}$ ؛ $\overrightarrow{OC}$ ؛ $\overrightarrow{OD}$ ؛ $\overrightarrow{OB}$ ؛ $\overrightarrow{OE}$ ؛ $\overrightarrow{OF}$



3 • إقرأ إحداثيي كل من الأشعة

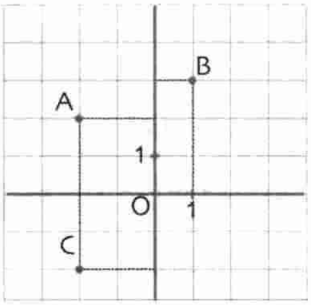
$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$ ؛ $\overrightarrow{CO}+\overrightarrow{OA}$ ؛ $\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{BC}$



4 • إقرأ إحداثيي كل شعاع من الأشعة الآتية :

$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$ ؛ $\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$

$\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BO}$



تمثيل شعاع

5 • ارسم ممثلا مبدأه O للشعاع $\vec{u}(-3 ; 2)$ و ممثلا له مبدأه $A(1 ; 1)$ و ممثلا مبدأه $B(-1 ; -1)$.

6 • ارسم ممثلا نهايته O للشعاع $\vec{v}(2 ; -3)$ و ممثلا نهايته $E(-1 ; -1)$ و ممثلا نهايته $F(2 ; -2)$.

7 • ارسم ممثلا مبدأه O لمعاكس الشعاع $\vec{w}(-3 ; 1)$.

8 $A(-1 ; -2)$ و $B(-3 ; +2)$

• ارسم ممثلا للشعاع $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$ مبدأه O.

حساب إحداثيي شعاع

9 $A(-3 ; -1)$ ؛ $B(2 ; -3)$ و $C(-1 ; 0)$

•1. مثل النقط A ؛ B ؛ C.

إقرأ إحداثيي كل من الأشعة $\overrightarrow{AB}$ ؛ $\overrightarrow{BC}$ و $\overrightarrow{CA}$

•2. تحقق بحساب إحداثيي كل من الأشعة الثلاثة.

10 $\vec{u}(-3 ; +2)$ شعاع. $A\left(0 ; \frac{3}{2}\right)$ نقطة.

• احسب إحداثيي النقطة $B(x_B ; y_B)$ حتى يكون $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$.

11 $\vec{v}\left(-\frac{3}{2} ; 2\right)$ شعاع و $M\left(\frac{5}{2} ; 0\right)$ نقطة.

• احسب إحداثيي النقطة N حتى يكون $\vec{v} = \overrightarrow{NM}$

12 $A(0 ; -3)$ ؛ $B\left(-\frac{5}{2} ; 1\right)$ و $C(-2 ; 7)$ ثلاث نقط.

• هل $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OC}$ ؟

13 • $A\left(-\frac{2}{3} ; +\frac{2}{3}\right)$ ؛ $B\left(0 ; -\frac{3}{5}\right)$ و $C\left(-\frac{2}{3} ; \frac{19}{15}\right)$

• هل $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{OC}$ ؟

منتصف قطعة

14 • احسب إحداثيي النقطة I منتصف القطعة [AB] علما أن $A\left(-\frac{3}{2} ; 0\right)$ و $B\left(8 ; \frac{3}{2}\right)$.

15 $A(5\,;2)$ و $B\left(\frac{20}{3}\,;5\right)$ نقطتان.

• هل مبدأ المعلم منتصف القطعة [AB] ؟ علل حسابيا.

16 • $A\left(-\frac{21}{5}\,;2\right)$ نقطة. عين إحداثيي النقطة B بحيث النقطة O، مبدأ المعلم، تكون منتصف [AB].

17 • $A\left(0\,;\frac{5}{2}\right)$ ؛ $B(0\,;-7{,}5)$ ؛ $C(-2{,}5\,;0)$ ؛ $D(2{,}5\,;-5)$ أربع نقط.

• بيّن بالحساب أن للقطعتين [AB] و [CD] نفس المنتصف.

18 • ABCD متوازي أضلاع حيث $A\left(\frac{7}{2}\,;\frac{7}{2}\right)$ و $C(-1;-4)$.

احسب إحداثيي مركز هذا متوازي الأضلاع.

19 $A(-5\,;3)$ و $B(2\,;-7)$ طرفا قطر دائرة.

• احسب إحداثيي مركزها.

20 $A(0\,;4)$ ؛ $B(-3\,;0)$ ؛ $C(0\,;3)$ ثلاث نقط.

M منتصف [AB] و N منتصف [AC].

• احسب إحداثيي الشعاع $\overrightarrow{MN}$.

المسافة بين نقطتين

المستوي مزود بمعلم متعامد و متجانس مبدأه O.

21 • احسب المسافة بين النقطتين $A(1\,;5)$ و $B(2\,;-7)$.

22 $A(1\,;2)$ و $B(-1\,;3)$ نقطتان.

• احسب أطوال أضلاع المثلث OAB. هل OAB مثلث قائم ؟

23 $A(1\,;1)$ ؛ $B(-1\,;0)$ ؛ $C(2\,;-1)$ ثلاث نقط.

• هل المثلث ABC متساوي الساقين ؟ هل هو قائم ؟

مسائل

24 لتكن النقط $A(1\,;0)$ ؛ $B\left(-\frac{1}{2}\,;\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ ؛ $C\left(-\frac{1}{2}\,;-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

1• أثبت أن المثلث ABC متقايس الأضلاع.

2• أثبت أن مركز الدائرة المحيطة به هو مبدأ المعلم.

25 $A\left(1\,;\frac{3}{2}\right)$ ؛ $B\left(\frac{5}{2}\,;0\right)$ ؛ $C\left(-2\,;-\frac{3}{2}\right)$ ثلاث نقط.

1• مثّل هذه النقط (وحدة الطول هي 1cm).

2• أثبت حسابيا أن المثلث ABC قائم. ما هو وتره ؟

3• احسب إحداثيي مركز الدائرة المحيطة بهذا المثلث.

26 $A(2\,;2)$ ؛ $B(-1\,;-1)$ ؛ $C(-2\,;-2)$ ؛ $D(1\,;1)$ أربع نقط.

1• أثبت أن مبدأ المعلم هو منتصف القطعتين [AC] و [BD].

2• أثبت أن المستقيمين (AC) و (BD) متوازيان.

3• ماذا تستنتجه بالنسبة إلى النقط A ، B ، C ، D ؟

27 $M(x\,;y)$ هي نقطة من المستوي.

1• أثبت أن $OM^2 = x^2 + y^2$.

2• $A(-3\,;2)$ ؛ $B(0\,;-5)$ ؛ $C(1\,;0)$ ثلاث نقط من المستوي. احسب كلا من OA ، OB و OC.

3• هل O مركز الدائرة المحيطة بالمثلث ABC ؟

28 $(\mathscr{C})$ هي دائرة مركزها O و نصف قطر 2cm.

(وحدة الطول هي 1cm).

$A(-2\,;2)$ ؛ $B(0\,;-2)$ ؛ $C(3\,;2)$ ثلاث نقط.

1• عيّن النقط التي تشملها الدائرة $(\mathscr{C})$.

2• لتكن $M(x\,;1)$ نقطة من الدائرة حيث $x > 0$.

• احسب القيمة المضبوطة للفاصلة x.

29 $(\mathscr{C})$ هي دائرة مركزها O و نصف قطرها 2cm.

(وحدة الطول هي 1cm)

$A(0\,;-2)$ و $B(0\,;2)$ نقطتان من $(\mathscr{C})$.

1• برهن أن [AB] هو قطر.

2• $M(-1\,;\sqrt{3})$ نقطة من المستوي.

• برهن أن المثلث AMB قائم في M.

30 $A(-2\,;0)$ و $B(0\,;-2)$ نقطتان.

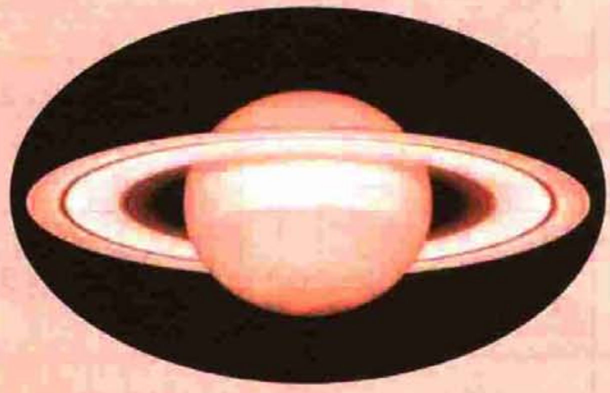
1• عيّن إحداثيي I مركز الدائرة ذات القطر [AB].

2• برهن أن هذه الدائرة تشمل O مبدأ المعلم.

13

الدوران - الزوايا و المضلعات المنتظمة

1 - صور أشكال بدوران
2 - خواص الدوران
3 - الزاوية المحيطية و الزاوية المركزية
4 - المضلعات المنتظمة



زحل

في المجموعة الشمسية تدور الكواكب و النجوم السيارة حول الشمس و تدور أقمار الكواكب حول الكواكب، فمثلا، حلقات زحل متكونة من ذرات صلبة، تدور حول الكوكب في مسارات دائرية مركزها مركز الكوكب و موجودة في مستو واحد هو مستوي خط استواء الكوكب زحل.

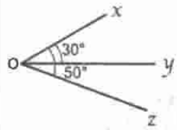
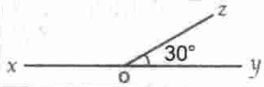
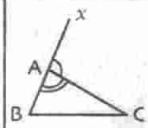
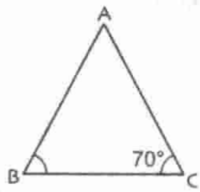
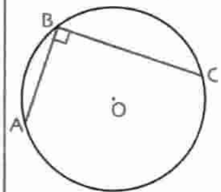
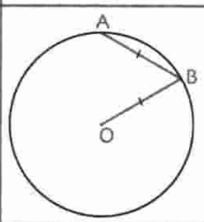
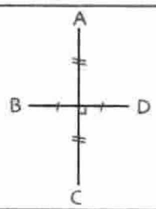
الكفاءات المستهدفة

(التي يجب اكتسابها)

- إنشاء صور النقطة و القطعة و المستقيم و نصف المستقيم و الدائرة بدوران.
- معرفة خواص الدوران و توظيفها.
- التعرف على الزاوية المركزية و الزاوية المحيطية.
- معرفة و استعمال العلاقة بين الزاوية المحيطية و الزاوية المركزية اللتين تحصران نفس القوس.
- إنشاء مضلعات منتظمة (المثلث متقايس الضلاع، المربع، السداسي المنتظم).

استبيان متعدد الإجابات

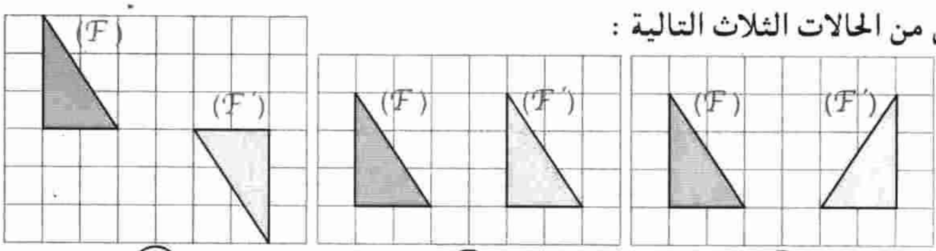
اختر الإجابة الصحيحة.

السؤال	الإجابة 1	الإجابة 2	الإجابة 3
1 • في الشكل المقابل، $\widehat{yOz}$ يساوي 	$80°$	$20°$	$40°$
2 • في الشكل المقابل، $\widehat{zOx}$ يساوي ... 	$180°$	$120°$	$150°$
3 • في الشكل المقابل، $\widehat{xAC}$ يساوي ... 	$\widehat{ABC} + \widehat{CAB}$	$\widehat{ABC} + \widehat{ACB}$	$\widehat{CAB} + \widehat{ACB}$
4 • ABC مثلث متساوي الساقين. $\widehat{BAC}$ يساوي ... 	$60°$	$40°$	$50°$
5 • في الشكل المقابل، $\widehat{AOC}$ ... 	يساوي $180°$	أصغر من $180°$	أكبر من $180°$
6 • في الشكل المقابل، $\widehat{ABO}$ يساوي ... 	$45°$	$60°$	$50°$
7 • في الشكل المقابل، الرباعي ABCD ... 	مربع	مستطيل	معين
8 • في متوازي أضلاع، نقطة تقاطع القطرين هي ...	مركز دائرة تشمل رؤوسه.	مركز تناظر له.	مركز دائرة مرسومة داخل هذا المتوازي الأضلاع.

أنشطة تحضيرية

النشاط 1

لاحظ الشكلين $(\mathcal{F})$ و $(\mathcal{F}')$ في كل من الحالات الثلاث التالية :



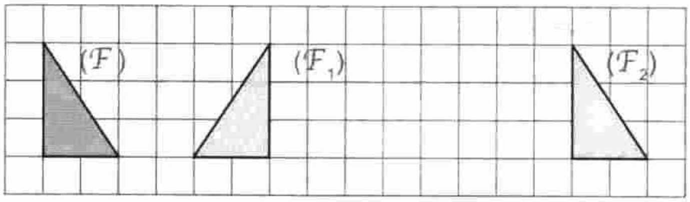
① ② ③

$(\mathcal{F}')$ هو صورة $(\mathcal{F})$ بتحويل.

- عيّن هذا التحويل و حدد عناصره في كل من الحالات الثلاث.

النشاط 2

لاحظ الشكل المقابل : أكمل بتعيين التحويل المناسب :

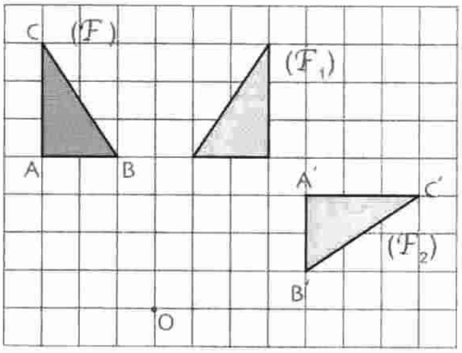


$(\mathcal{F}_1)$ هو صورة $(\mathcal{F})$ بـ ....

$(\mathcal{F}_2)$ هو صورة $(\mathcal{F}_1)$ بـ ....

$(\mathcal{F}_2)$ هو صورة $(\mathcal{F})$ بـ ....

النشاط 3



لاحظ الشكل المقابل.

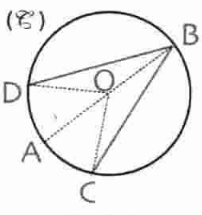
1. كيف يمكن الانتقال من الشكل $(\mathcal{F})$ إلى الشكل $(\mathcal{F}_1)$ ؟
2. كيف يمكن الانتقال من الشكل $(\mathcal{F}_1)$ إلى الشكل $(\mathcal{F}_2)$ ؟
3. كيف يمكن الانتقال من الشكل $(\mathcal{F})$ إلى الشكل $(\mathcal{F}_2)$ ؟
4. ارسم الدوائر التي مركزها O و أنصاف أقطارها OA ، OB و OC على الترتيب.

- قارن بين الزوايا $\widehat{AOA'}$ ، $\widehat{BOB'}$ ، $\widehat{COC'}$.

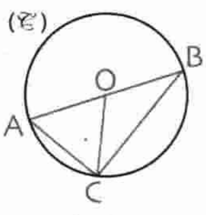
5. ضع ورقا شفافا على الرسم، أنقل الشكل $(\mathcal{F})$، ضع إبرة المدور على النقطة O و دوّر الورق الشفاف حتى ينطبق $(\mathcal{F})$ على $(\mathcal{F}_2)$. عين زاوية الدوران واتجاهه. - دوّر الورق الشفاف لينطبق $(\mathcal{F}_2)$ على $(\mathcal{F})$ عين زاوية و اتجاه الدوران.

- هل $(\mathcal{F}_1)$ ينطبق على $(\mathcal{F})$ أو $(\mathcal{F}_2)$ بإحدى الدورانين السابقتين ؟

النشاط 4



(الشكل 2)



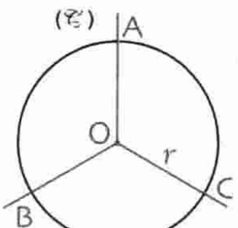
(الشكل 1)

1. $(\mathscr{C})$ هي دائرة مركزها O و [AB] قطرا لها. (الشكل 1)

- عبّر عن قيس الزاوية $\widehat{AOC}$ بدلالة قيس الزاوية $\widehat{ABC}$.

2. عبّر عن قيس الزاوية $\widehat{AOC}$ (الشكل 2) بدلالة الزاوية $\widehat{ABC}$ و عن قيس الزاوية $\widehat{AOD}$ بدلالة قيس الزاوية $\widehat{ABD}$. استنتج قيس $\widehat{DOC}$ بدلالة قيس $\widehat{DBC}$.

النشاط 5



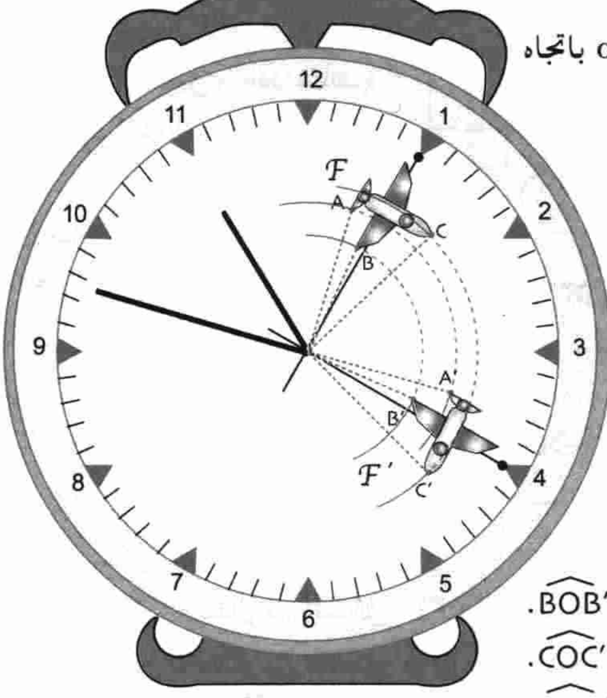
$(\mathscr{C})$ دائرة مركزها O و نصف قطرها r. A ، B و C نقط من الدائرة $(\mathscr{C})$ بحيث $\widehat{AOB} = \widehat{BOC} = \widehat{COA}$.

- ما نوع المثلث ABC ؟ علل إجابتك.

معارف

1 - الدوران - صورة نقطة بدوران

صورة نقطة بدوران



الصورة تبيّن أنه عندما يدور عقرب الثواني بزاوية α باتجاه السهم حول النقطة O، فإن الشكل $\mathcal{F}$ يدور بزاوية α لينطبق على الشكل $\mathcal{F}'$.

نقول إن $\mathcal{F}'$ هو صورة $\mathcal{F}$ بالدوران الذي مركزه النقطة O وزاويته $\alpha°$ واتجاهه هو اتجاه السهم (اتجاه عقارب الساعة)

نلاحظ أنه :

B يدور لينطبق على B' بحيث $OB = OB'$ و $\widehat{BOB'} = \alpha$.

C يدور لينطبق على C' بحيث $OC = OC'$ و $\widehat{COC'} = \alpha$.

A يدور لينطبق على A' بحيث $OA = OA'$ و $\widehat{AOA'} = \alpha$.

إذن يعيّن الدوران بالعناصر الثلاثة : مركز الدوران (و هو نقطة مثبتة) - زاوية الدوران - اتجاه الدوران (في اتجاه عقارب الساعة أو عكس هذا الاتجاه).

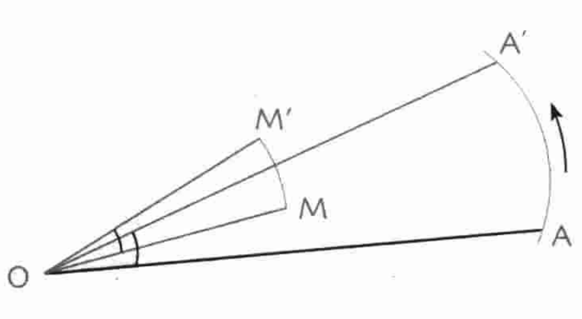
ملاحظة
- يمكن تحديد عناصر دوران بتعين صورة نقطة بهذا الدوران.
- الاتجاه المعاكس لاتجاه دوران عقارب الساعة يسمى «الاتجاه المباشر».

تعريف

صورة النقطة O بالدوران الذي مركزه O وزاويته α هي النقطة O نفسها.

صورة نقطة M تختلف عن O بالدوران الذي مركزه O وزاويته $\alpha°$ في اتجاه معين هي النقطة M' بحيث $OM = OM'$ و $\widehat{MOM'} = \alpha°$.

مثال



لاحظ الشكل المقابل.

A' صورة A بدوران.

M' هي صورة M بنفس الدوران.

لدينا $OM = OM'$ و $\widehat{MOM'} = 27°$

هذا الدوران هو الدوران الذي مركزه النقطة O.

زاويته $27°$ و اتجاهه هو الاتجاه المباشر.

2 - خواص دوران - صور أشكال مألوفة

2-1 خواص **كل دوران يحافظ على الأطوال، الزوايا و الإستقامية.**

2-2 صور أشكال مألوفة

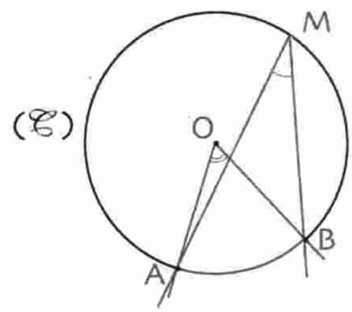
صور الأشكال المألوفة بدوران تستنتج بتوظيف خواص هذا الدوران.
- **صورة مستقيم هو مستقيم** • **صورة نصف مستقيم هو نصف مستقيم.**
- **صورة قطعة مستقيم هي قطعة مستقيم تقايسها** • **صورة دائرة هي دائرة لها نفس نصف القطر.**

3 - الزاوية المحيطية و الزاوية المركزية

3-1 الزاوية المحيطية و الزاوية المركزية

تعريف

$(\mathscr{C})$ هي دائرة مركزها O . M ، B ، A ثلاث نقط منها.
- **تسمى الزاوية $\widehat{AMB}$ زاوية محيطية.**
- **تسمى الزاوية $\widehat{AOB}$ الزاوية المركزية المرفقة بالزاوية المحيطية $\widehat{AMB}$.**
- **نقول عن الزاوية المحيطة $\widehat{AMB}$ و الزاوية المركزية $\widehat{AOB}$ المرفقة بها أنهما تحصران نفس القوس $\overset{\frown}{AB}$.**



ملاحظات
- **رأس الزاوية المحيطة $\widehat{AMB}$ هو نقطة من الدائرة.**
- **رأس الزاوية المركزية $\widehat{AOB}$ هو مركز الدائرة.**
- **[MA] و [MB] هما وتران من الدائرة.**

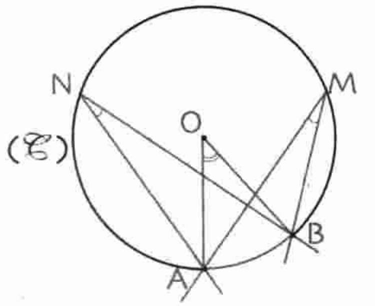
3-2 قيس زاوية محيطية و قيس الزاوية المركزية المرفقة بها

نظرية **قيس زاوية محيطية يساوي نصف قيس الزاوية المركزية المرفقة بها.**

3-3 الزوايا المحيطية التي تحصر نفس القوس

ينتج عن النظرية السابقة النتيجة التالية :

نتيجة **إذا حصرت زاويتان محيطيتان نفس القوس فإن أقياسها متساوية.**



- **$\widehat{AMB}$ و $\widehat{ANB}$ زاويتان محيطيتان تحصران نفس القوس $\overset{\frown}{AB}$.**
- **$\widehat{AOB}$ هي الزاوية المركزية المرفقة بهما**

إذن $\widehat{AMB} = \widehat{ANB} = \frac{1}{2}\widehat{AOB}$.

4 - المضلعات المنتظمة

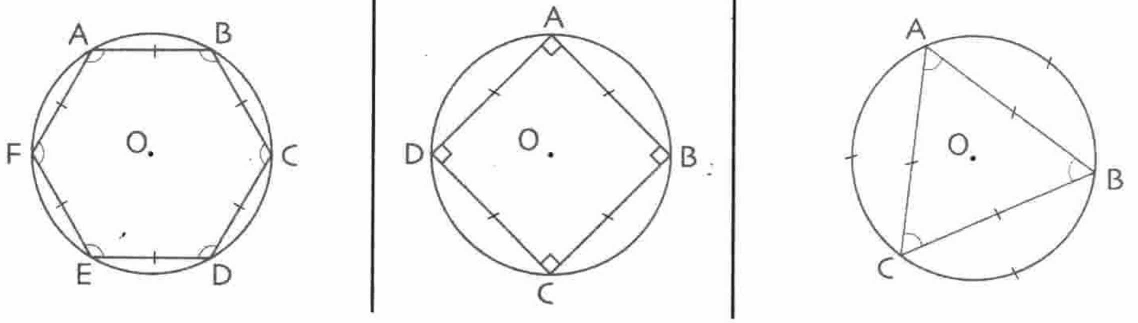
تعريف المضلع المنتظم هو مضلع أضلاعه متقايسة و زوياه متقايسة.

خاصية 1 توجد دائرة تشمل رؤوس مضلع منتظم.

الدائرة التي تشمل رؤوس مضلع منتظم تسمى الدائرة المحيطة به و مركزها هو مركز هذا المضلع المنتظم.

أمثلة مضلعات منتظمة مألوفة

مثلث متقايس الأضلاع | مربع | سداسي منتظم

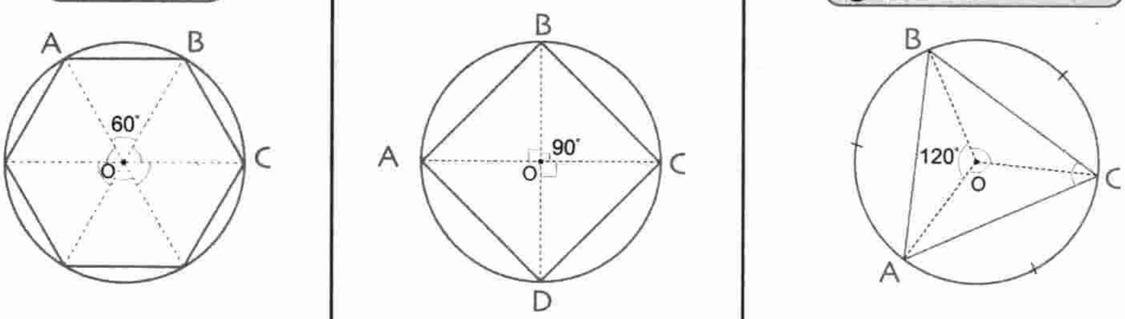


خاصية 2 O مركز مضلع منتظم و N عدد أضلاعه.
إذا كان [AB] أحد أضلاعه فإن قيس الزاوية المركزية $\widehat{AOB}$ هو $\frac{360^\circ}{N}$.

نتائج
- [AB] ضلع من مضلع منتظم مركزه O.
كل الزوايا المركزية مثل $\widehat{AOB}$ متقايسة و قيسها $\frac{360^\circ}{N}$.
- صورة هذا المضلع المنتظم بالدوران الذي مركزه O و زاويته $\widehat{AOB}$ هي المضلع نفسه.

أمثلة في المضلعات المنتظمة التالية لدينا :

مثلث متقايس الأضلاع | مربع | سداسي منتظم



$\widehat{AOB} = \frac{360^\circ}{3} = 120°$
$\widehat{ABC} = 60°$

$\widehat{AOB} = \frac{360^\circ}{4} = 90°$
$\widehat{ABC} = 90°$

$\widehat{AOB} = \frac{360^\circ}{6} = 60°$
$\widehat{ABC} = 120°$

طرائق

1 - إنشاء صور أشكال مألوفة بدوران

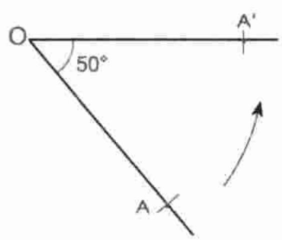
في كل الإنشاءات الواردة في هذه الفقرة، نعتبر الدوران الذي مركزه O، زاويته α، اتجاهه هو اتجاه معين بسهم.

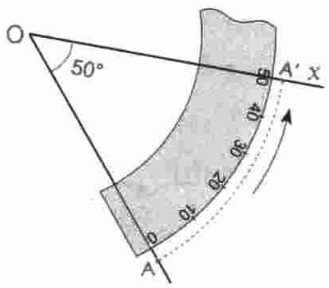
1-1 إنشاء صورة نقطة

طريقة لإنشاء A' صورة نقطة A، نرسم الزاوية $\widehat{AOx}$ في اتجاه السهم بحيث $\widehat{AOx} = \alpha$ ثم نعين النقطة A' من نصف المستقيم $[Ox)$ بحيث $OA' = OA$.

تمرين انشئ صورة النقطة A بالدوران الذي مركزه O و زاوية $50°$ في الاتجاه المعاكس لاتجاه عقارب الساعة.

حل
- نرسم نصف مستقيم $[OA)$.
- نستعمل منقلة لرسم زاوية قيسها $50°$ و في اتجاه السهم، فنعين مبدأ نصف مستقيم $[Ox)$ نستعمل المدور لتعيين النقطة A' على $[Ox)$ بحيث $OA' = OA$.

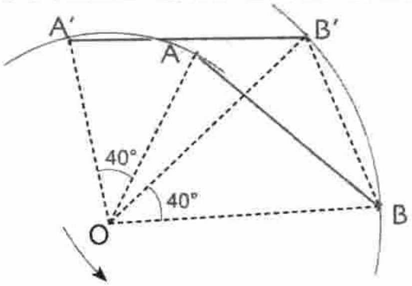




2-1 إنشاء صورة قطعة مستقيم

طريقة لإنشاء صورة قطعة مستقيم $[AB]$ بدوران، ننشئ A' و B' صورتي A و B على الترتيب. تكون القطعة $[A'B']$ هي صورة القطعة $[AB]$ بهذا الدوران.

تمرين انشئ صورة القطعة $[AB]$ بالدوران الذي مركزه O و زاويته $40°$ و في الاتجاه المعاكس لاتجاه عقارب الساعة (الاتجاه المباشر).



حل نعين النقطتين A' و B' بحيث : A' هي صورة A، B' هي صورة B.
إذن $[A'B']$ هي صورة $[AB]$ بهذا الدوران.

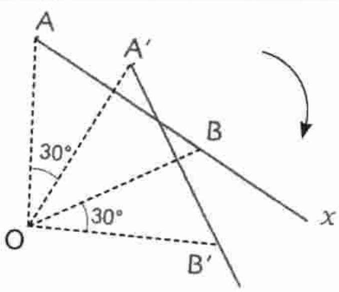
3-1 إنشاء صورة مستقيم

طريقة لإنشاء صورة مستقيم (D) بدوران، نختار نقطتين A و B من المستقيم (D) و ننشئ A' و B' صورتي A و B بالدوران. فيكون المستقيم $(A'B')$ هو صورة المستقيم (D) بهذا الدوران.

4-1 إنشاء صورة نصف مستقيم

طريقة لإنشاء صورة نصف المستقيم $[Ax)$ بدوران، نختار نقطة B من $[Ax)$ تختلف عن A ثم ننشئ A' و B' صورتي A و B على الترتيب. فيكون نصف المستقيم $[A'B')$ هو صورة نصف المستقيم $[Ax)$.

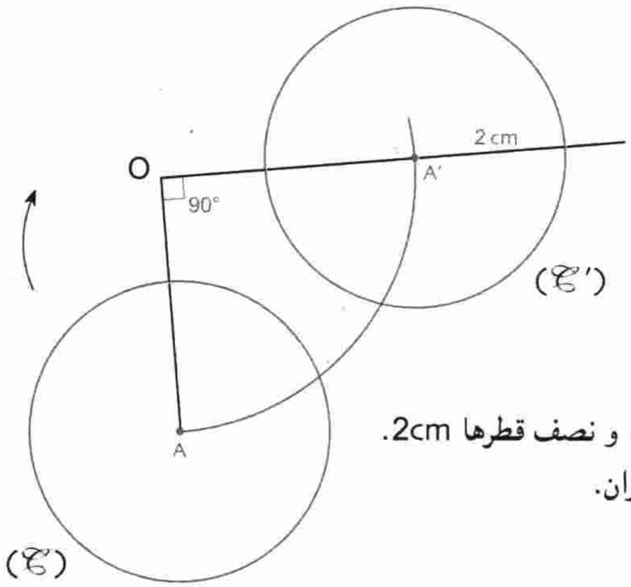
تمرين أنشئ صورة نصف المستقيم $[Ax)$ بالدوران الذي مركزه O و زاوية $30°$ في اتجاه عقارب الساعة.



حل B نقطة من $[Ax)$ تختلف عن A. $\widehat{AOA'} = 30°$ و $OA' = OA$
النقطة B' تحقق $\widehat{BOB'} = 30°$ و $OB' = OB$
نصف المستقيم $[A'B')$ هو صورة نصف المستقيم $[Ax)$ بهذا الدوران.

5-1 إنشاء صورة دائرة

طريقة لإنشاء صورة دائرة $(\mathscr{C})$ مركزها A و نصف قطرها R بدوران، ننشئ 'A صورة المركز A.
و تكون الدائرة التي مركزها 'A و نصف قطرها R هي صورة الدائرة $(\mathscr{C})$.

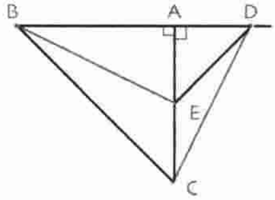


تمرين أنشئ صورة الدائرة $(\mathscr{C})$ التي مركزها A
و نصف قطرها 2 cm بالدوران الذي مركزه O
و زاويته 90° في اتجاه عقارب الساعة.

حل مركز $(\mathscr{C}')$ هو صورة مركز $(\mathscr{C})$.
للدائرتين نفس نصف القطر.
ننشئ 'A صورة A ثم ننشئ الدائرة التي مركزها 'A و نصف قطرها 2cm.
نحصل على الدائرة $(\mathscr{C}')$ صورة $(\mathscr{C})$ بهذا الدوران.

2 - توظيف خواص الدوران في براهين

طريقة يمكن توظيف خواص الدوران في براهين بالبحث عن أشكال قابلة للتطابق. يمكن توظيف خواص الدوران إذا أعطي الدوران أو البحث عن الدوران الذي يحقق التطابق.



تمرين في الشكل المقابل، لدينا AB = AC و AD = AE
و $\widehat{BAC} = \widehat{DAE} = 90°$.
برهن أن BE = CD.

حل
- AB = AC و $\widehat{BAC} = 90°$ إذن B هو صورة C بالدوران الذي مركزه A وزاويته 90° في اتجاه عقارب الساعة.
- AD = AE و $\widehat{DAE} = 90°$ إذن E هو صورة D بنفس الدوران. $\boxed{C} \rightarrow \boxed{B}$ ، $\boxed{D} \rightarrow \boxed{E}$

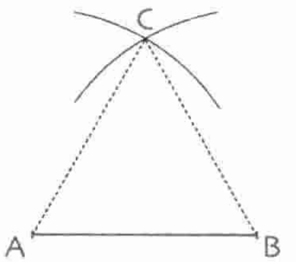
إذن [BE] هي صورة [CD] بالدوران الذي مركزه A و زاويته 90° في إتجاه عقارب الساعة
و بالتالي CD = BE.

3 - إنشاء مضلع منتظم طول ضلعه معلوم

طريقة لإنشاء مضلع منتظم طول ضلعه معلوم يمكن اتباع المراحل التالية :
- نحسب قيس زاويته و لتكن α.
- نرسم أحد أضلاعه و ليكن [AB].
- نحول A إلى C بالدوران الذي مركزه B وزاويته α في الإتجاه المناسب.
- نواصل بالدوران الذي مركزه C و بنفس الزاوية و الاتجاه لتحويل B إلى D ....

تمرين 1 إنشئ مثلثا متقايس الأضلاع، سداسيا منتظما، مربعا طول ضلع كل من هذه المضلعات 2 cm.

حل إنشاء المثلث المتقايس الأضلاع طول ضلعه 2cm

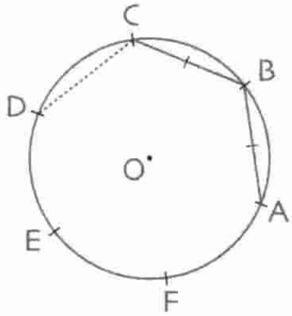


يعود الانشاء إلى إنشاء مثلث علمت أطوال أضلاعه.

- ننشئ أحد أضلاعه ليكن [AB] بحيث AB = 2 cm.
- نرسم قوسي دائرتين نصف قطريهما 2 cm مركزاهما A و B على الترتيب.

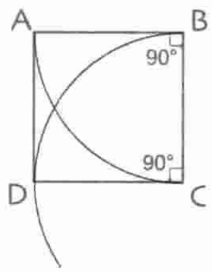
يتقاطع القوسان في النقطة C.

يمكن تطبيق الطريقة بالدوران الذي مركزه A (أو B) و زاويته $60°$ للحصول على الرأس C.



إنشاء سداسي منتظم طول ضلعه 2cm

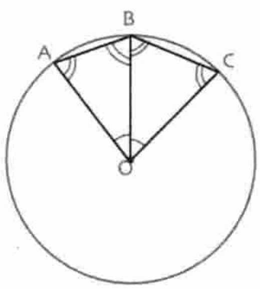
- ننشئ دائرة نصف قطرها 2 cm.
- نعين على الدائرة نقط تحدد أوتارا متتالية طول كل منها 2 cm (نستعمل المدور لتعيين طرفي كل منها). يمكن استعمال الدوران الذي زاويته $\widehat{ABC}$ أي $120°$ و نطبق طريقة إنشاء مضلع منتظم طول ضلعه معلوم.



إنشاء مربع طول ضلعه 2cm

- ننشئ أحد أضلاعه و ليكن [AB].
- نحول A إلى C بالدوران الذي مركزه B و زاويته $90°$ و نعين الرؤوس الأخرى بتطبيق الطريقة المذكورة سابقا.

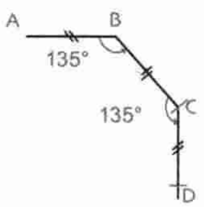
تمرين 2 أنشئ ثمانيا منتظما حيث طول ضلعه 2 cm.



حل نرسم باليد الحرة الشكل. المطلوب الحصول عليه : قيس الزاوية المركزية $\widehat{AOB}$ هو $\frac{360°}{8}$ أي $45°$.

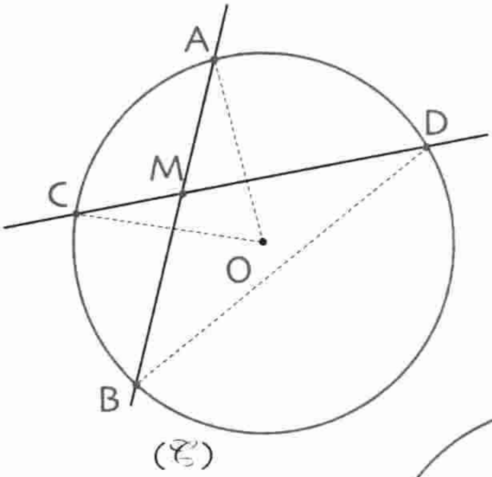
قيس الزاوية $\widehat{ABC}$ هو $(180° - 45°)$ أي $135°$.

(لأن $\widehat{ABC} = 2\widehat{ABO}$ و $\widehat{ABO} + \widehat{OAB} = 2\widehat{ABO} = 180° - 45°$)



إذن ننشئ الضلع [AB] ثم نحول A إلى C بالدوران الذي مركزه B و زاويته $135°$ و نواصل باستعمال الدوران الذي مركزه C ، ...

تمرين محلولة



تمرين 1 $(\mathscr{C})$ دائرة مركزها O. (الشكل)

M نقطة من القرص. (AB) و (CD) مستقيمان يشملان M و يقطعان الدائرة في A و B و في C و D على الترتيب.

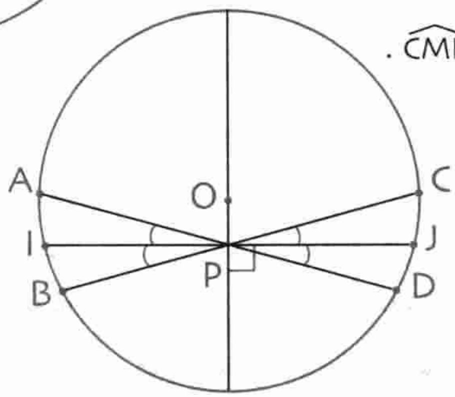
1 • هل $\widehat{AMD}$ زاوية محيطية ؟

2 • برهن أن $\widehat{AMD} = \widehat{CDB} + \widehat{ABD}$.

3 • برهن أن $\widehat{CMB} = \dfrac{\widehat{COB} + \widehat{AOD}}{2}$.

4 • باستعمال الشكل المقابل

برهن أن $\widehat{API} = \dfrac{\widehat{AOB}}{2}$.



حل 1 • $\widehat{AMD}$ ليست زاوية محيطية لأن رأسها M ليس نقطة من الدائرة حسب المعطيات.

2 • $\widehat{AMD} + \widehat{BMD} = 180° = \widehat{AMB}$ و مجموع زوايا المثلث BMD يساوي 180°.

أي $\widehat{BMD} + \widehat{MBD} + \widehat{MDB} = 180°$

$\widehat{AMD} + \widehat{BMD} = 180°$ و $\widehat{BMD} + \widehat{MBD} + \widehat{MDB} = 180°$ إذن $\widehat{AMD} = \widehat{MBD} + \widehat{MDB}$

أي $\widehat{AMD} = \widehat{CDB} + \widehat{ABD}$ (لأن $\widehat{MBD} = \widehat{CDB}$ و $\widehat{MDB} = \widehat{ABD}$).

3 • $\widehat{AMD}$ زاوية محيطية إذن $\widehat{AMD} = \dfrac{\widehat{COB}}{2}$.

$\widehat{ABD}$ زاوية محيطية إذن $\widehat{ABD} = \dfrac{\widehat{COB}}{2}$ و بالتالي $\widehat{AMD} = \dfrac{\widehat{COB} + \widehat{AOD}}{2}$.

$\widehat{AMD}$ و $\widehat{CMB}$ متقابلتان بالرأس إذن $\widehat{AMD} = \widehat{CMB}$ و بالتالي $\widehat{CMB} = \dfrac{\widehat{COB} + \widehat{AOD}}{2}$

4 • حسب نتيجة السؤال 3 يكون $\widehat{APB} = \dfrac{\widehat{AOB} + \widehat{COD}}{2}$. المستقيم (OP)

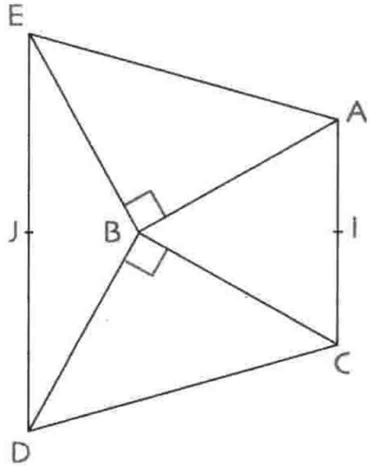
محور تناظر للشكل وبالتالي : $\widehat{AOB} = \widehat{COD}$ و $\dfrac{\widehat{AOB} + \widehat{COD}}{2} = \widehat{AOB}$.

ينتج أن $\widehat{APB} = \widehat{AOB}$ و $\dfrac{1}{2}\widehat{APB} = \dfrac{1}{2}\widehat{AOB}$ و بالتالي $\widehat{AOI} = \dfrac{\widehat{AOB}}{2}$.

تمرين 2 ABC مثلث متقايس الأضلاع.

CBD و ABE مثلثان قائمان و متساويا الساقين في الوضعية المبينة في الشكل.

I منتصف [AC] و J منتصف [DE].



1 • ما هي صورتا النقطتين A و D بالدوران الذي مركزه B و زاويته $90°$ و اتجاهه الاتجاه المباشر؟

• استنتج صورة القطعة [AD] بهذا الدوارن.

2 • برهن أن $CE = AD$ و أن المستقيمين (EC) و (AD) متعامدان.

3 • برهن أن B هي نقطة من المستقيم (IJ).

حل 1 • المثلث ABE قائم في B و متساوي الساقين إذن $BE = BA$ و $\widehat{ABE} = 90°$. ينتج أن صورة A هي E.

المثلث CBD قائم في B و متساوي الساقين إذن $BC = BD$ و $\widehat{CBD} = 90°$. ينتج أن صورة D هي C.

لدينا : صورة A هي E.

و صورة D هي C.

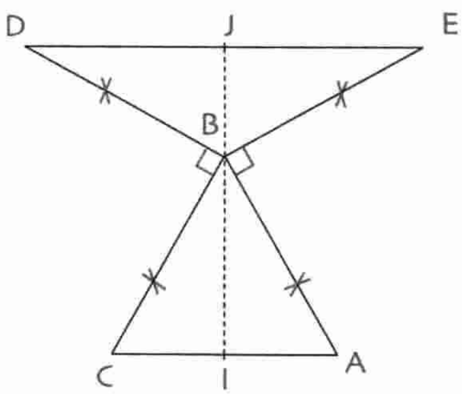
إذن صورة [AD] هي [EC].

2 • بما أن [EC] هي صورة [AD] فإن $AD = EC$ لأن الدوران يحافظ على الأطوال.

صورة المستقيم (AD) هو المستقيم (EC).

بما أن زاوية الدوران هي $90°$ فإن المستقيم (AD) و صورته (EC) تكونان زاوية قيسها $90°$.

إنهما متعامدان.



3 • المثلث DBE متساوي الساقين

رأسه الأساسي B إذن $\widehat{DBE} = 2\widehat{JBE}$.

$\widehat{DBE} = 360° - (2\times90° + 60°)$

أي $\widehat{DBE} = 120°$

و بالتالي $\widehat{JBE} = 60°$.

$\widehat{JBI} = \widehat{JBE} + \widehat{EBA} + \widehat{ABI}$

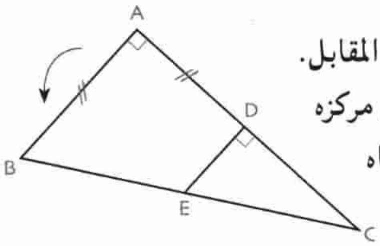
$= 60° + 90° + 30°$

$= 180°$

إذن النقاط I ، B ، J على استقامة واحدة. و بالتالي المستقيم (IJ) يشمل B.

تمارين و مسائل

صحيح أو خاطئ

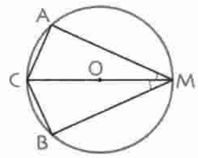


1 • 1 لاحظ الشكل المقابل.
صورة A بالدوران الذي مركزه A و زاوية 90° في اتجاه السهم هي C.

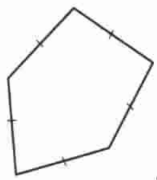
• 2 في الشكل السابق، صورة D بالدوران الذي مركزه A وزاويته 90° في الاتجاه المعاكس للسهم هي B.

• 3 صورة E بالدوران المعرف سابقا (السؤال 2) هي B.

• 4 صورة القطعة [AD] بالدوران المعرف سابقا (السؤال 2) هي [AB].



• 5 في الشكل المقابل
$\widehat{AOC} = \widehat{AMB}$



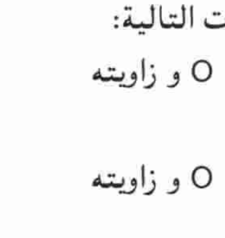
• 6 الشكل المقابل يمثل خماسي منتظم.

• 7 المعين هو رباعي منتظم.

• 8 قيس زاوية خماسي منتظم هي 108°.

تمارين

صورة نقطة بدوران



2 إليك الشكل المقابل.
لاحظ أن صورة E هي F بالدوران الذي مركزه O، زاويته 40° و في اتجاه السهم.
عيّن زاوية و اتجاه كل دوران في الحالات التالية:

• صورة E هي G بالدوران الذي مركزه O و زاويته .... و ....

• صورة B هي A بالدوران الذي مركزه O و زاويته .... و ....

• صورة F هي S بالدوران الذي مركزه O و زاويته .... و ....

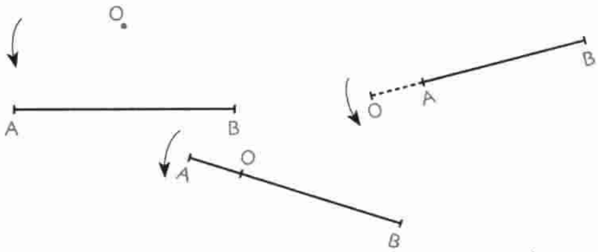
3 • استعمل الشكل السابق لإتمام الجمل التالية :
صورة A هي .... بالدوران الذي مركزه O وزاويته 70° و ....

• صورة G هي .... بالدوران الذي مركزه O و زاويته 20° و ....

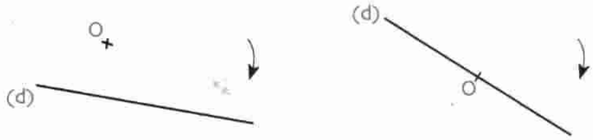
• صورة K هي .... بالدوران الذي مركزه O وزاويته 90° و ....

صور أشكال بدوران

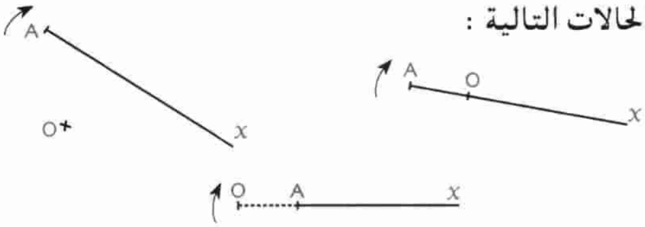
4 • أنشئ صورة القطعة [AB] بالدوران الذي مركزه O وزاويته 50° في اتجاه السهم في الحالات التالية.



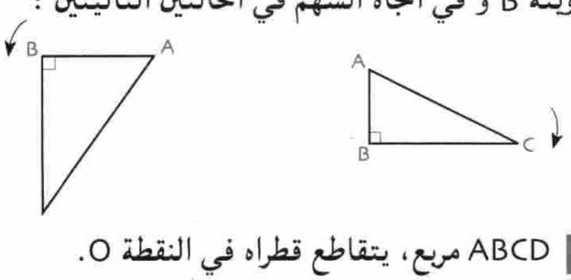
5 • أنشئ صورة المستقيم (d) بالدوران الذي مركزه O و زاويته 60° في اتجاه السهم في كل من الحالتين التاليتين :



6 • أنشئ صورة نصف المستقيم [Ax) بالدوران الذي مركزه O وزاويته 50° في اتجاه السهم في كل حالة من الحالات التالية :

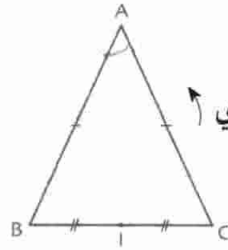


7 • أنشئ صورة المثلث ABC بالدوران الذي مركزه B وزاويته $\widehat{B}$ و في اتجاه السهم في الحالتين التاليتين :



8 ABCD مربع، يتقاطع قطراه في النقطة O.
• أنشئ صورة ABCD بالدوران الذي مركزه O وزاويته 90° في اتجاه عقارب الساعة.

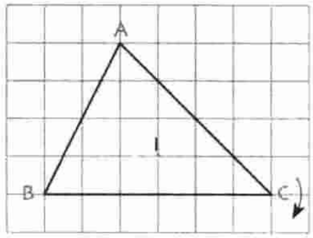
9 ABC مثلث متساوي الساقين.



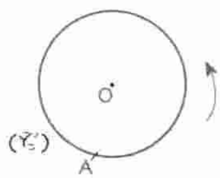
• أنشئ صورة المثلث ABC بالدوران الذي مركزه A وزاويته $\widehat{A}$ في اتجاه السهم.

• عين صورة I منتصف [BC].

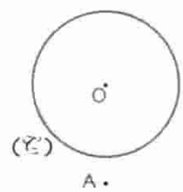
10 • أنشئ على ورق مرصوف صورة ABC بالدوران الذي مركزه I وزاويته 90° في اتجاه السهم.



11 • أنشئ صورة الدائرة $(\mathscr{C})$ بالدوران الذي مركزه A وزاويته 90° في اتجاه السهم.



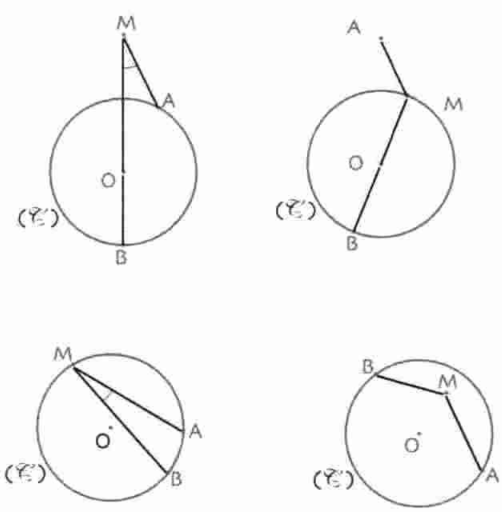
12 • أنشئ صورة الدائرة $(\mathscr{C})$ بالدوران الذي مركزه A وزاويته 90° و في اتجاه عقارب الساعة.



الزاوية المحيطية و الزاوية المركزية

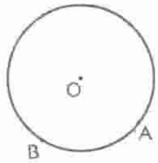
13 • لاحظ الأشكال في كل حالة من الحالات التالية :

هل الزاوية $\widehat{AMB}$ زاوية محيطية ؟ علل.



14 $(\mathscr{C})$ دائرة مركزها O

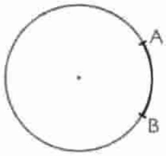
(لاحظ الشكل)



• ارسم زاوية محيطية $\widehat{AMB}$ بحيث أحد أضلاعها يشمل مركز الدائرة.

و زاوية غير محيطية $\widehat{ANB}$ أحد أضلاعها يشمل مركز الدائرة.

15 • لاحظ الشكل. أرسم زاويتين محيطيتين تحصران القوس $\overset{\frown}{AB}$.



16 $(\mathscr{C})$ دائرة مركزها O (لاحظ الأشكال)

• احسب قيس كل من الزوايا التالية :

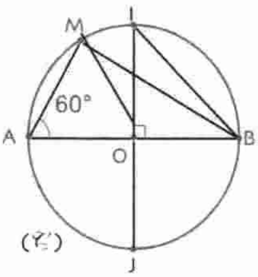
$\widehat{AMB}$

$\widehat{MBA}$

$\widehat{MOB}$

$\widehat{OMB}$

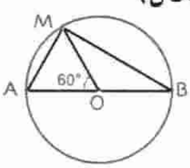
$\widehat{BIJ}$



17 $(\mathscr{C})$ دائرة مركزها O (لاحظ الأشكال)

.OA = 3 cm

• احسب MA و MB بتقريب 1mm.

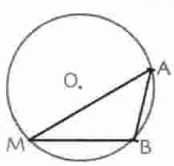


18 $(\mathscr{C})$ دائرة مركزها O و نصف قطرها 2 cm

(لاحظ الشكل) و M نقطة من الدائرة $(\mathscr{C})$.

[AB] و تر لها، طوله 2 cm.

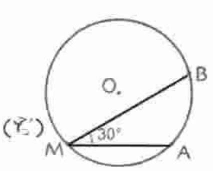
• احسب قيس الزاوية $\widehat{AMB}$.



19 $(\mathscr{C})$ دائرة مركزها O و نصف قطرها 2 cm

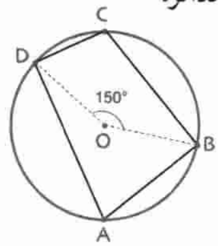
(لاحظ الشكل)

• احسب طول القطعة [AB].



20 A، B، C وD أربع نقط من الدائرة ($\mathscr{C}$) التي مركزها O (الشكل).

• احسب قيس $\widehat{BAD}$.



المضلعات المنتظمة

21 1 • ارسم دائرة ($\mathscr{C}$) مركزها O.

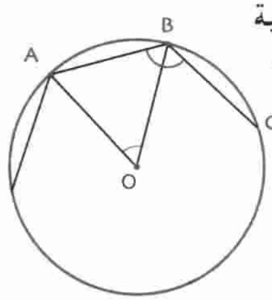
• ارسم قطرين متعامدين منها.

2 • برهن أن نقط تقاطع الدائرة و القطرين هي رؤوس مربع.

3 • محاور أضلاع المربع تقطع الدائرة في أربع نقط.

• برهن أن النقط الثمانية هي رؤوس ثماني منتظم.

22 A، B و C هي رؤوس متتالية من مضلع منتظم. O مركز الدائرة المحيطة بهذا المضلع. (الشكل).



• برهن أن

$\widehat{ABC} + \widehat{AOB} = 180°$

23 • ارسم مثلثا متقايس الأضلاع ثم مربعا خارج المثلث على كل ضلع من المثلث، طول ضلعه هو طول ضلع المثلث.

• هل المضلع المحصل عليه مضلع منتظم ؟ علل.

مسائل

24 • ارسم مربعا مركزه O.

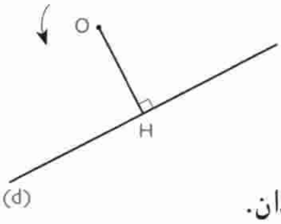
• ارسم مربعا مركزه O يطابق المربع السابق بحيث قطراه يكونان مع قطري المربع الأول زاوية 45°.

(يمكن رسم الدائرة المحيطة بالمربع الأول).

تتقاطع أضلاع المربعين في ثمان نقط.

• هل الثماني الذي رؤوسه هذه النقط هو ثماني منتظم ؟

25 لاحظ الشكل.

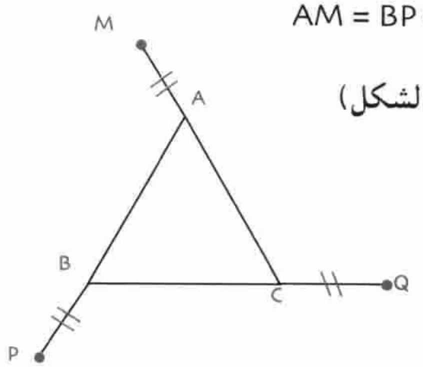


1 • أنشئ (d′) صورة (d) بالدوران الذي مركزه O و زاويته 90° في اتجاه السهم.

2 • برهن أن (d) و (d′) متعامدان.

26 ABC مثلث متقايس الأضلاع حيث AM = BP = CQ

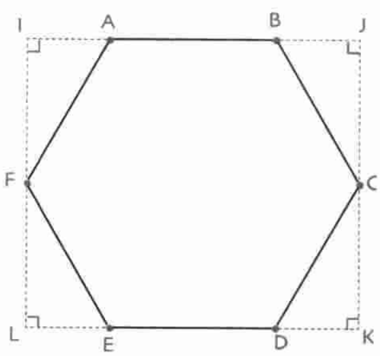
(الشكل)



1 • برهن أن المثلث MPQ متقايس الأضلاع.

2 • برهن أن مركز الدائرة المحيطة بالمثلث MPQ هو مركز الدائرة المحيطة بالمثلث ABC.

27 ABCDEF سداسي منتظم (لاحظ الشكل).



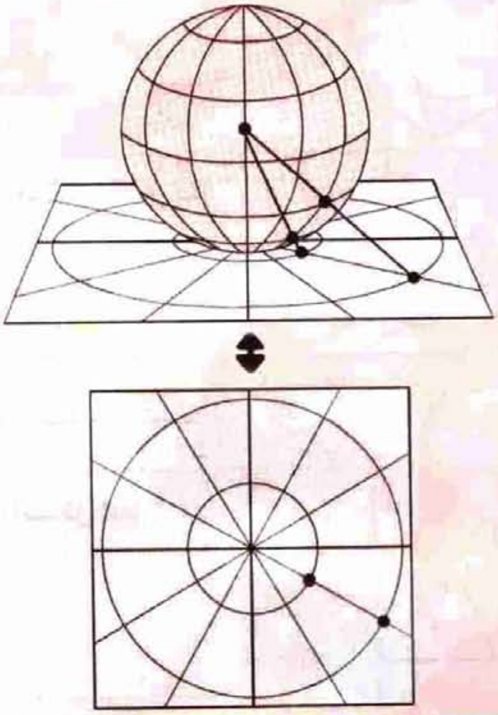
1 • برهن أن الرباعي IJKL ليس مربعا.

2 • ليكن x طول ضلع السداسي.

• عبّر عن IJ و JK بدلالة x.

3 • احسب IJ و JK بتقريب 1mm من أجل $x = 60\text{cm}$.

14 الهندسة في الفضاء - الكرة و الجلة - المقاطع المستوية



لو أردنا بسط نصف كرة (مثل كرة تينس) على طاولة لمزقت دون الحصول علي سطح مستو.

كيف يمكن إذن تمثيل سطح الكرة الأرضية على ورقة (خريطة) ؟

تمثل الكرة الأرضية على ورقة (خريطة) مع إلحاق الواقع (كرة الأرض) ببعض التشوهات.

تستعمل عدة طرق من بينها تلك الممثلة في الشكل.

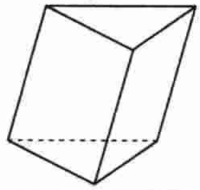
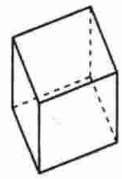
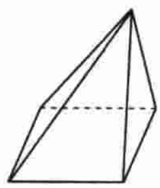
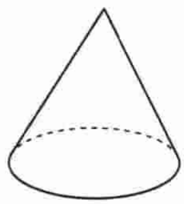
الكفاءات المستهدفة

(التي يجب اكتسابها)

- التعرف على الكرة و الجلة.
- حساب مساحة الكرة وحجم الجلة.
- معرفة و استعمال المقاطع المستوية للمجسمات المألوفة.
- معرفة الآثار على مساحة و حجم مجسم عند التكبير أو تصغير أبعاد هذا المجسم.

استبيان متعدد الإجابات

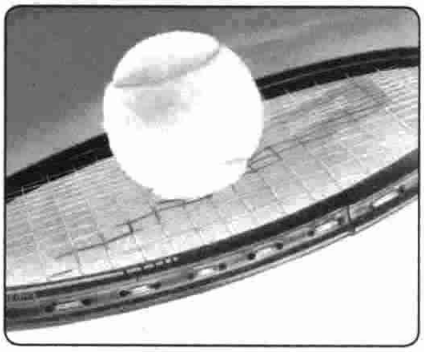
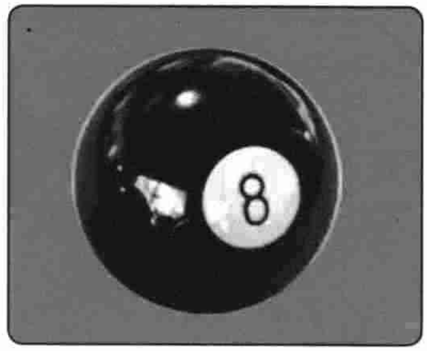
اختر الإجابة الصحيحة.

السؤال	الإجابة 1	الإجابة 2	الإجابة 3
1 • الشكل المقابل يمثل … 	هرما	متوازي المستطيلات	موشورا
2 • الشكل المقابل يمثل … 	مكعبا	موشورا قائما	هرما
3 • قاعدة هرم منتظم هي …	مثلث قائم	مظلع منتظم	مربع
4 • الشكل المقابل يمثل … 	هرما منتظما	هرما غير منتظم	موشورا
5 • الشكل المقابل يمثل … 	هرما منتظما	أسطوانة	مخروطا
6 • مخروط الدوران يولد بدوران …	دائرة	قطعة مستقيم	مثلث قائما
7 • أسطوانة الدوران تولد بدوران …	دائرة	مستطيل	مثلث قائما
8 • عندما يدور مثلث متقايس الأضلاع حول أحد متوسطاته فيولد …	هرما	مخروطا	موشورا

أنشطة تحضيرية

النشاط 1

1 • لاحظ الصورتين.
(الشكل 1)
• عيّن كلا من الكرة و الجلة (كرة مملوءة).

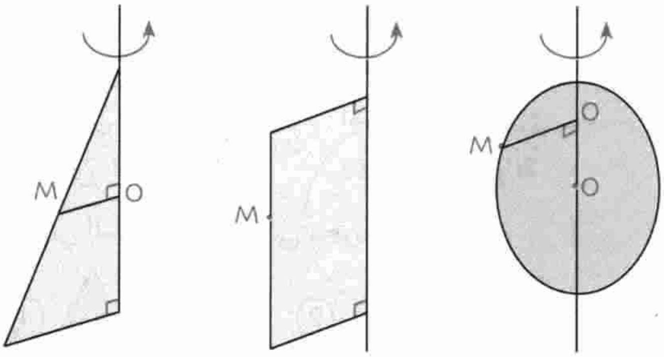
1

2 • الكرة الأرضية هي كرة فارغة رسم عليها خطوط الطول وخطوط العرض. (الشكل 2)
• ما هي خطوط الطول ؟
• ما هي خطوط العرض ؟

2

النشاط 2

يمثل الشكل 1 دائرة مركزها O و نصف قطرها 1,5 cm. تدور حول أحد أقطارها في مستوي الورقة.
• ماذا تولد ؟
• ارسم مسار النقطة M من هذه الدائرة و التي تبعد عن محور الدوران بمسافة 1,2 cm.
يمثل الشكل 2 مستطيلا عرضه 2 cm و يدور حول طوله الواقع في مستوي الورقة.
• ارسم مسار النقطة M.

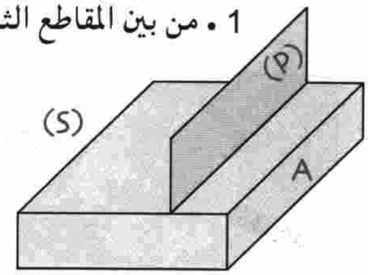


1 2 3

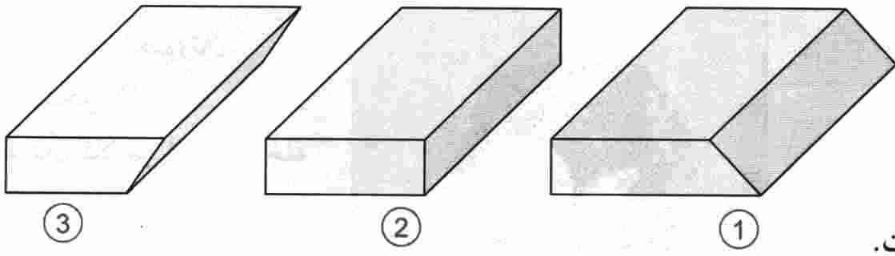
يمثل الشكل 3 مثلثا قائما يدور حول أحد أضلاعه القائمة. M نقطة من الوتر تبعد عن محور الدوران بمسافة 1 cm.
• ارسم مسار النقطة M.

النشاط 3

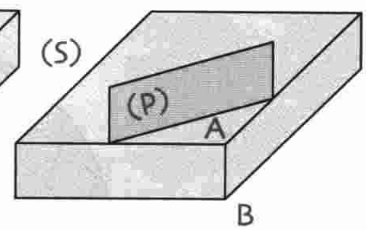
1 • من بين المقاطع الثلاث التالية، عين مقطع المستوي (P) للمجسم (S).



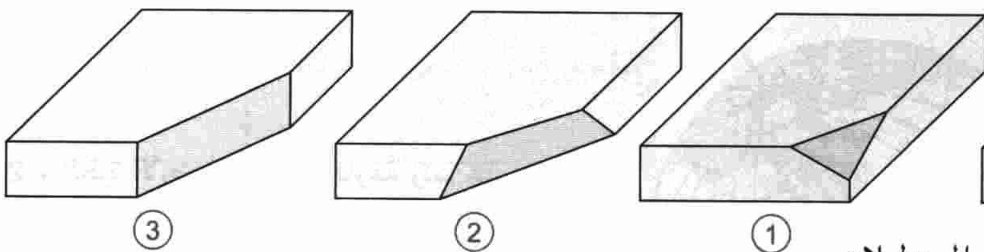
(P) يوازي الوجه A لمتوازي المستطيلات.



2 • نفس السؤال بالنسبة إلى لحالات التالية.

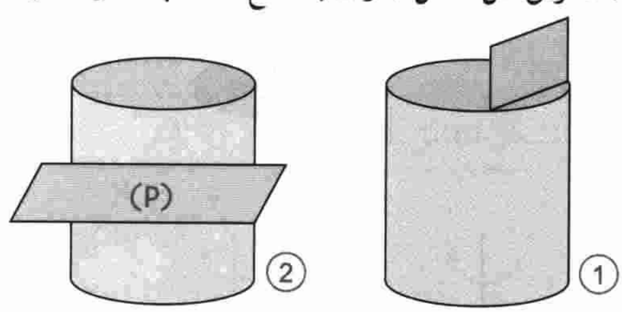


(P) يوازي الحرف [AB] لمتوازي المستطيلات.



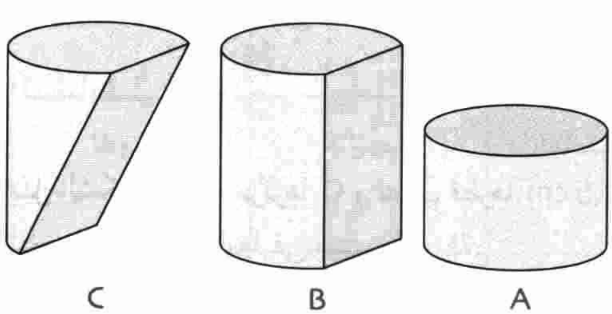
النشاط 4

1 • أرفق كل شكل 1 و 2 بالمقطع المناسب A أو B أو C.

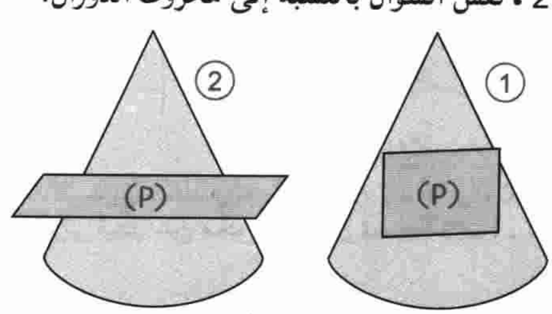


المستوي (P) يوازي محور الأسطوانة

المستوي (P) يوازي قاعدة الأسطوانة

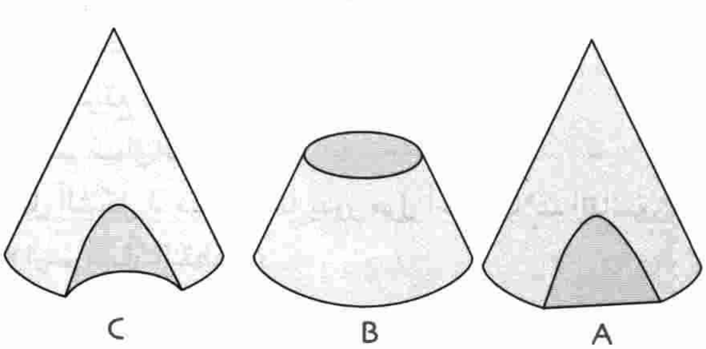


2 • نفس السؤال بالنسبة إلى مخروط الدوران.



المستوي (P) يوازي محور الدوران

المستوي (P) يوازي القاعدة

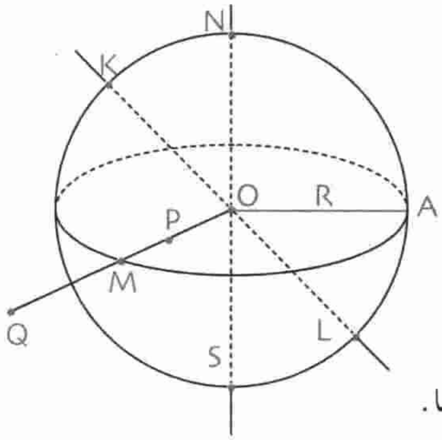


معارف

1-1 الكرة

تعريف **الكرة التي مركزها النقطة O و نصف قطرها R هي مجموعة نقط الفضاء التي تبعد عن O بالمسافة R.**

مثال **الكرة التي مركزها O و نصف قطرها 1,8 cm هي مجموعة النقط M من الفضاء بحيث OM = 1,8 cm.**



في الشكل لدينا :

- **M نقطة من الكرة لأن OM = R.**
- **P ليست نقطة من الكرة لأن OP < R.**
  P تقع داخل الكرة.
- **Q ليست نقطة من الكرة لأن OQ > R.**
  Q تقع خارج الكرة.
- **N، S، K و L نقط من الكرة.**

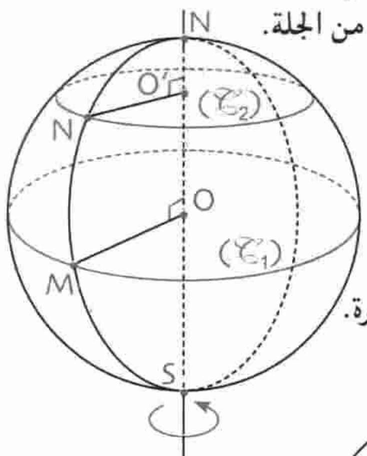
كل من القطعتين [KL] و [NS] تشمل مركز الكرة، فهما قطران لها.

1-2 الجلة

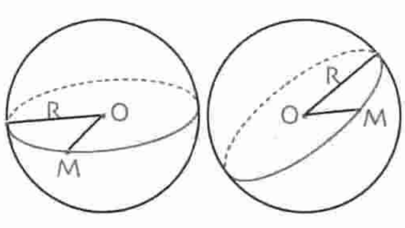
تعريف **الجلة التي مركزها النقطة O و نصف قطرها R هي مجموعة النقط M حيث OM ≤ R.**

- **الجلة التي مركزها النقطة O و نصف قطرها R هي مجموعة نقط الكرة التي مركزها O و نصف قطرها R و النقط التي تقع داخل هذه الكرة. و بالتالي كل نقطة من الكرة هي نقطة من الجلة.**

1-3 تمثيل الكرة **لاحظ الشكل.**



- **عندما تدور الدائرة $(\mathscr{C})$ ذات المركز O حول محورها (NS)**
  فإنها تولد سطح الكرة التي مركزها O و قطرها NS.
- **مسار النقطة M هي دائرة كبرى $(\mathscr{C}_1)$ مركزها O و قطرها قطر الكرة.**
- **مسار النقطة N هي دائرة صغيرة $(\mathscr{C}_2)$ مركزها O و قطرها أصغر من قطرالكرة.**
  $(\mathscr{C}_1)$ و $(\mathscr{C}_2)$ تقعان في مستويين متوازيين.
- **يمكن تمثيل كرة بإحدى دوائرها الكبرى و مركزها و نصف قطرها.**



2 مساحة كرة و حجم جلة

تعريف
- **مساحة كرة نصف قطرها R معرفة بالقاعدة :** $\mathcal{A} = 4\pi R^2$
- **حجم جلة نصف قطرها R معرفة بالقاعدة :** $\mathcal{V} = \frac{4}{3}\pi R^3$

مثال **مساحة كرة نصف قطرها 1,2 cm و حجم جلة نصف قطرها 1,2 cm هما :**

- **$\mathcal{A}$ مساحة الكرة :** $\mathcal{A} = 4\pi R^2 = 4\pi\,(1,2)^2$ **أي** $\mathcal{A} \approx 18,09\text{ cm}^2$ **بتقريب** 1 mm^2
- **$\mathcal{V}$ حجم الجلة :** $\mathcal{V} = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi\,(1,2)^3$ **أي** $\mathcal{V} \approx 7,235\text{ cm}^3$ **بتقريب** 1 mm^3

3- المقاطع المستوية لمجسمات مألوفة

3-1. مقاطع مستوي لكرة و لجلة

خاصية

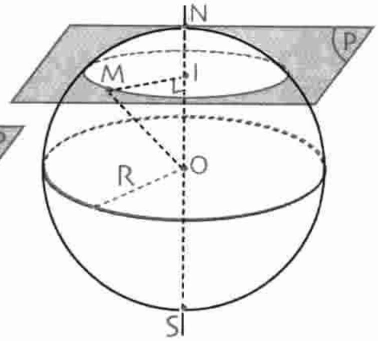
- **مقطع مستوي لكرة هو دائرة.**
- **مقطع مستوي لجلة هو قرص.**

ملاحظات

إذا كان I مركز مقطع المستوي للكرة فإن I نقطة من أحد محاور الكرة.

لكل نقطة M من الدائرة، المثلث OIM قائم في I.

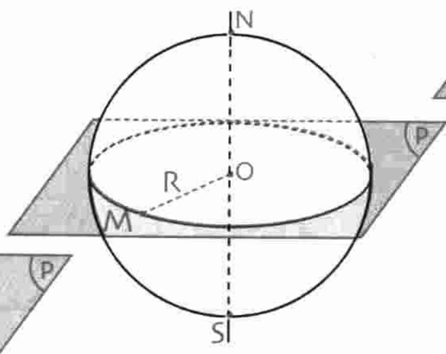
المستوي يقطع الكرة إذا كان $OI < R$.



$OI < R$

$IM < R$ و نصف قطر الدائرة أصغر من نصف قطر الكرة.

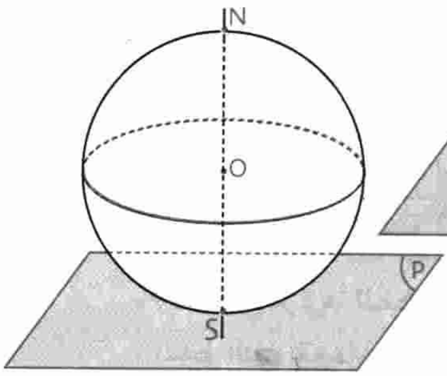
المستوي يقطع الكرة وفق دائرة صغيرة.



$OI = 0$

نصف قطر الدائرة يساوي نصف قطر الكرة.

المستوي يقطع الكرة وفق دائرة كبرى.



$OI = R$

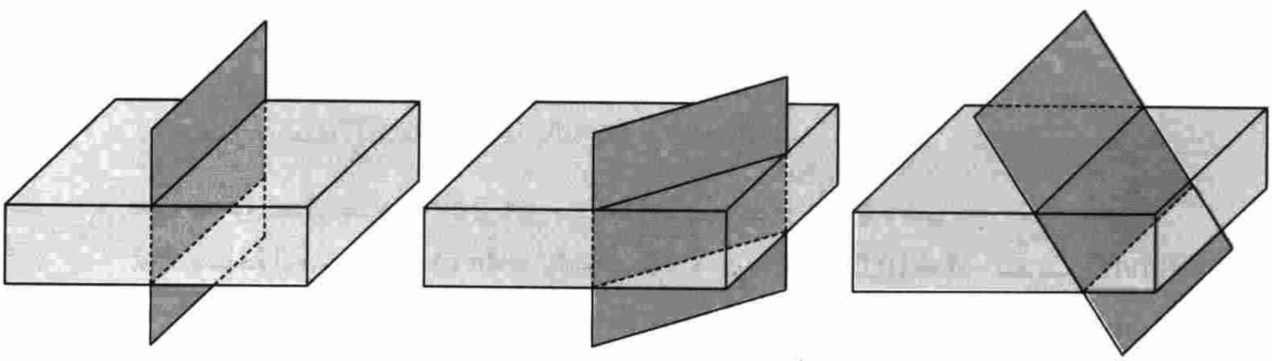
يشترك المستوي و الكرة في نقطة وحيدة.

. المستوي مماس للكرة.

3-2 مقاطع مستوية لمتوازي مستطيلات

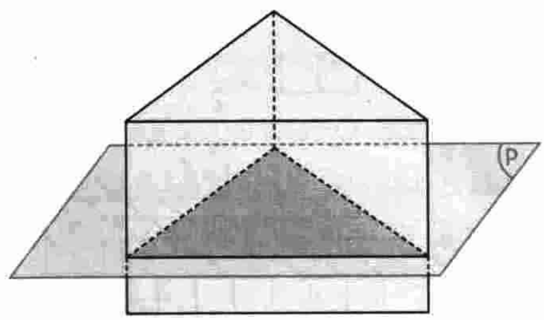
خاصية

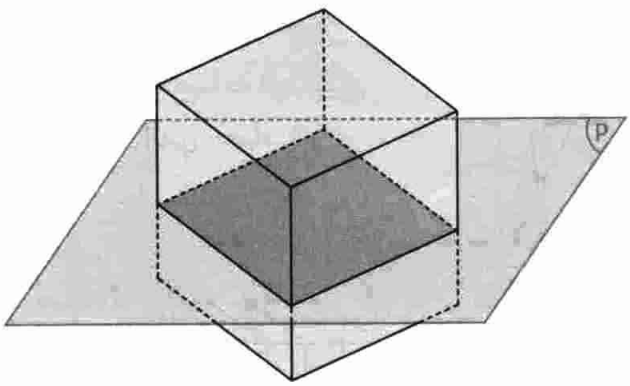
مقطع مستوي لمتوازي مستطيلات هو مستطيل.



3-3 مقطع مستوي لموشور حيث المستوي يوازي قاعدة الموشور

خاصية **مقطع مستوي لموشور قائم حيث المستوي يوازي قاعدة الموشور هو سطح مطابق لقاعدة هذا الموشور.**

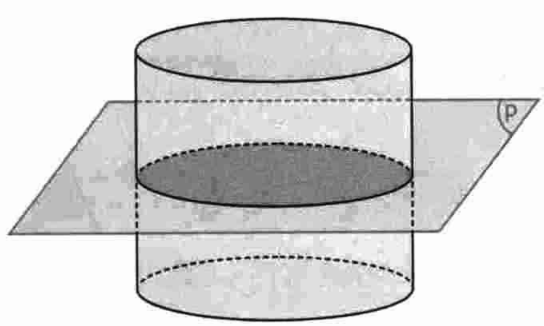


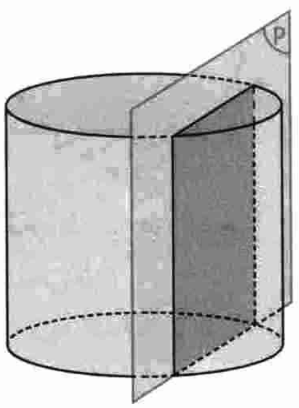


3-4 مقطع مستوي لأسطوانة دوران

خاصية

- **مقطع مستوي لأسطوانة الدوران حيث المستوي محور الأسطوانة هو مستطيل.**
- **مقطع مستوي لأسطوانة الدوران حيث المستوي يوازي قاعدة الأسطوانة هو قرص مطابق للقاعدة.**





4 - التكبير و التصغير

4-1 تعاريف و خواص

تعريف

- **تكبير شكل أو مجسم يعود إلى ضرب أبعاده في عدد k أكبر من 1.**
- **تصغير شكل أو مجسم يعود إلى ضرب أبعاده في عدد محصور بين 0 و 1.**

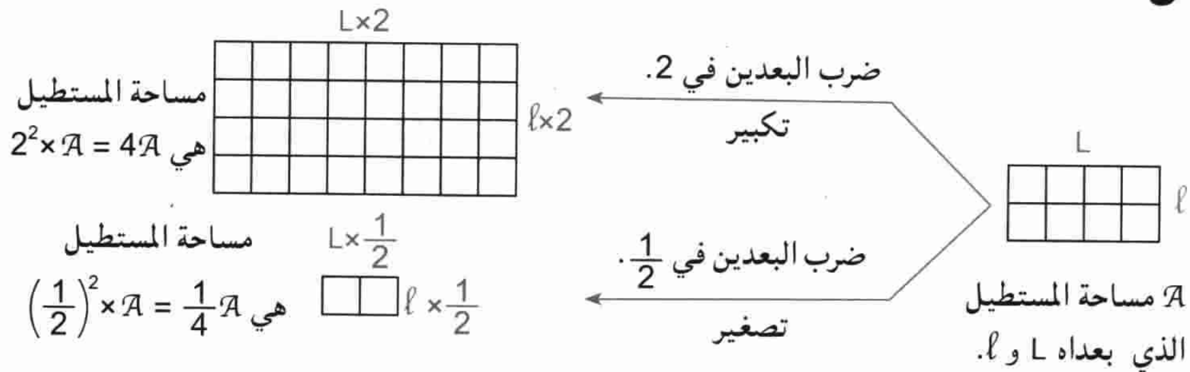
العدد k هو نسبة (أو سلم) التكبير أو التصغير.

في كل من الحالتين تضرب المساحة في k^2 و يضرب الحجم في k^3.

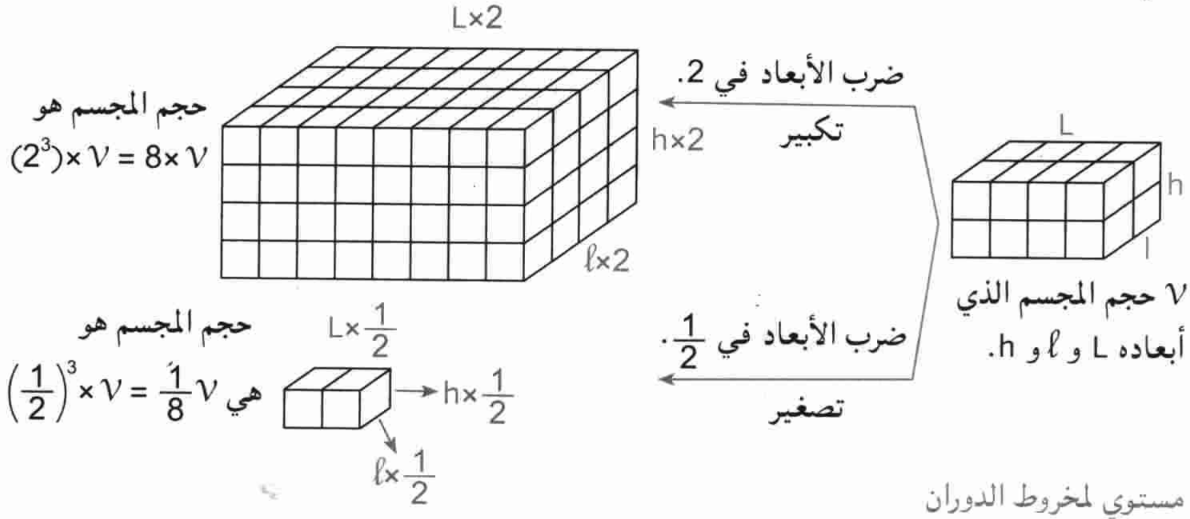
ملاحظة

- **عند تكبير أو تصغير مجسم نتحصل على مجسم من نفس الطبيعة الهندسية.**
- **عند تكبير أو تصغير مجسم، لا تتغير أقياس الزوايا.**

مثال 1



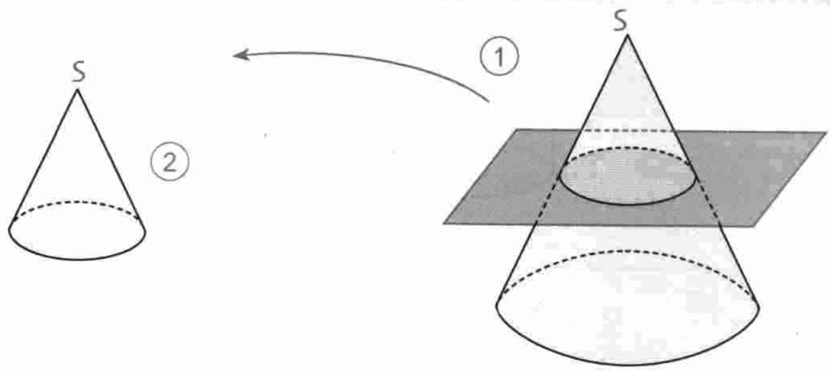
مثال 2



4-2 مقطع مستوي لمخروط الدوران

خاصية **مقطع مستو لمخروط الدوران حيث المستوي يوازي قاعدة المخروط هو تصغير لقاعدة المخروط.**

المخروط 2 هو تصغير للمخروط 1.



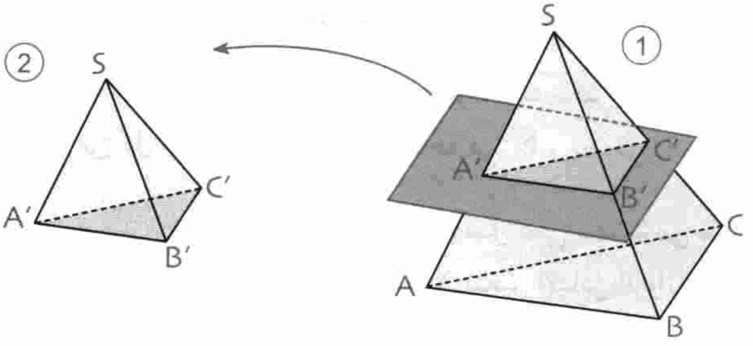
4-2 مقطع مستو لهرم

خاصية **مقطع مستو لهرم حيث المستوي يوازي قاعدة الهرم هو تصغير لقاعدة الهرم.**

الهرم 2 هو تصغير للهرم 1.

ملاحظة
- (A′B′) يوازي (AB).
- (B′C′) يوازي (BC).
- (A′C′) يوازي (AC).

على كل وجه من الهرم نلاحظ مثلثين في وضعية طالس.

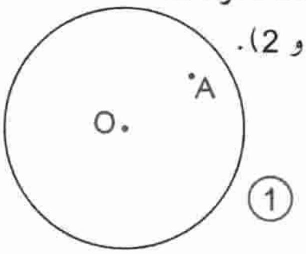


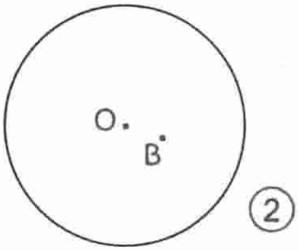
طرائق

1 - تمثيل نقطة من كرة أو من جلة

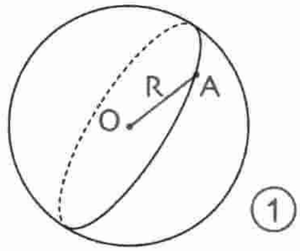
طريقة لتمثيل نقطة A من كرة يكفي رسم إحدى الدوائر الكبرى تشمل A و رسم نصف القطر الذي يشمل A.
لتمثيل نقطة B من الجلة (داخل الكرة) يكفي رسم نصف قطر الكرة [OM] يشمل النقطة B و إحدى الدوائر الكبرى نصف قطرها [OM].

تمرين النقطة A نقطة من الكرة التي مركزها O و نصف قطرها R.
النقطة B نقطة داخل الكرة (لاحظ الشكلين 1 و 2).
- مثل على الكرة النقطتين A و B.

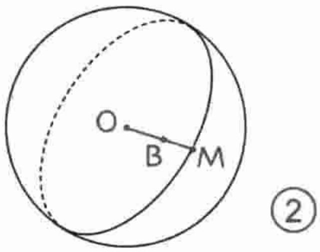




حل 1 • نرسم [OA]
ثم إحدى الدوائر الكبرى نصف قطرها [OA].



2 • نرسم نصف القطر [OM] يشمل B
ثم إحدى الدوائر الكبرى نصف قطرها [OM].



2 - حساب نصف قطر مقطع مستو لكرة

طريقة لحساب نصف قطر مقطع مستو لكرة يمكن توظيف نظرية فيثاغورث أو النسب المثلثية في مثلث قائم.

تمرين يقطع مستوي كرة نصف قطرها 2 cm وفق دائرة مركزها O' بحيث $OO' = 1{,}5\text{ cm}$.
- احسب نصف قطر هذه الدائرة.

حل لتكن M نقطة من الدائرة مقطع المستوي للكرة. المثلث $OO'M$ قائم في O' بحيث $OO' = 1{,}5\text{ cm}$.
نعلم أن $OM = 2\text{ cm}$. بتطبيق نظرية فيثاغورث نجد :

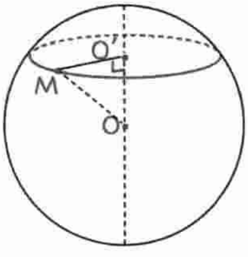
$$OM^2 = OO'^2 + O'M^2$$

$O'M^2 = OM^2 - OO'^2$ و بعد التعويض نجد :

$$O'M^2 = 4 - 2{,}25 = 1{,}75.$$

و بالتالي : $O'M = \sqrt{1{,}75}$

أي $O'M \approx 1{,}32\text{ cm}$ بتقريب $\frac{1}{100}$.



3 - حساب نصف قطر مقطع مستو لمخروط الدوران

طريقة

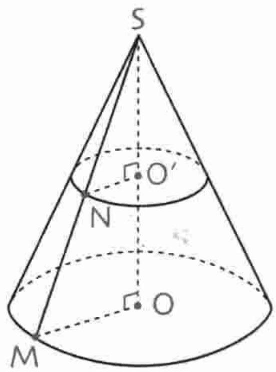
لحساب نصف قطر مقطع مستو لمخروط الدوران حيث المستوي يوازي قاعدة المخروط يمكن تطبيق نظرية فيثاغورث أو النسب المثلثية في مثلث قائم أو نظرية طالس.

تمرين مخروط دوران ارتفاعه 4 cm و نصف قطره 1,5 cm يقطع بسمتو يوازي قاعدة هذا المخروط على بعد 1 cm من القاعدة.

1 • احسب نصف قطر المقطع الناتج.

2 • احسب نسبة حجم المخروط العلوي على حجم المخروط الكبير.

حل 1 • ليكن S رأس المخروط.



N و M نقطتان من نفس المولد.

لدينا : المثلث SO′N قائم في O′ و المثلث SOM قائم في O.

المثلثان SO′N و SOM في و ضعية طالس.

إذن $\frac{O'N}{OM} = \frac{SO'}{SO}$. نعلم أن $SO = 4$ و $OM = 1,5$ و $OO' = 1$

إذن $SO' = SO - OO'$ أي $SO' = 3$.

بعد التعويض نجد : $\frac{O'N}{1,5} = \frac{3}{4}$.

ينتج أن $O'N = \frac{3\times 1,5}{4}$

أي $O'N \approx 1,13\text{ cm}$ بتقريب $\frac{1}{100}$.

2 • لدينا : $\frac{\text{حجم المخروط العلوي}}{\text{حجم المخروط الكبير}}$ هو $\left(\frac{O'N}{OM}\right)^3$

بما أن $\frac{3}{4} = \frac{SO'}{SO} = \frac{O'N}{OM}$

فإن $\left(\frac{O'N}{OM}\right)^3 = \left(\frac{3}{4}\right)^3 = \frac{27}{64}$

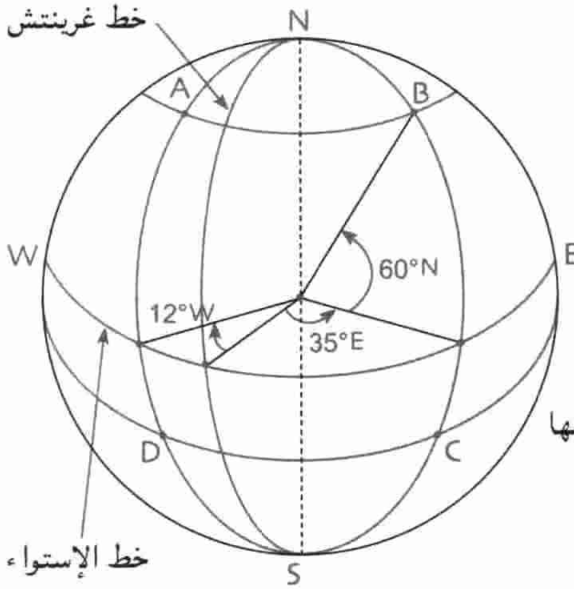
و بالتالي : نسبة حجم المخروط العلوي على حجم المخروط الكبير هي $\frac{27}{64}$.

تمرين محلول

تمرين D ، C ، B ، A أربع نقط من الكرة الأرضية.

إحداثيا النقطة A هما 12°W و 60°N.

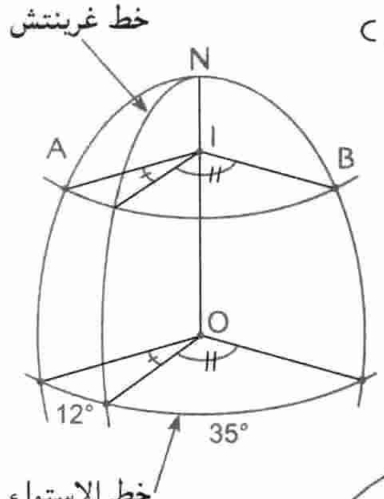
إحداثيا النقطة C هما 35°E و 18°S.



1 • ما هما إحداثيا كل من النقطتين B و D علما أن A و B تقعان على نفس دائرة العرض B و C على نفس خط الطول ، D و C على نفس دائرة العرض، A و D على نفس خط الطول.

2 • A و B تمثلان مدينتين. احسب المسافة التي تقطعها طائرة من A نحو B متعبة دائرة العرض.

ماهي مدة السفر علما أن سرعتها هي 800 km/h و أن نصف قطر الأرض هو 6380 km.



حل 1 • بما أن دائرة عرض B هي دائرة عرض A و خط طول B هو خط طول C فإن إحداثيي B هما 35°E و 60°N.

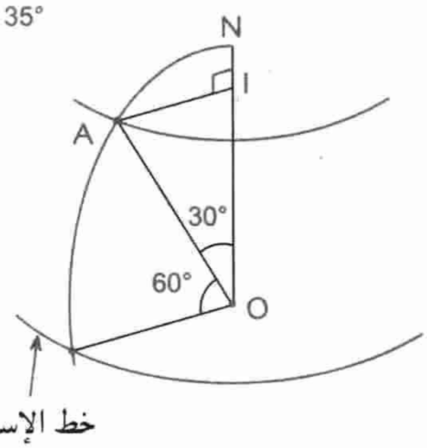
بما أن دائرة عرض D هي دائرة عرض C و خط طول D هو خط طول A فإن إحداثيي D هما 12°W و 18°S.

2 • المسافة عبارة عن طول القوس $\widehat{AB}$ من دائرة العرض التي تقع عليهما المدينتان A و B.

يكفي حساب الزاوية المركزية و نصف قطر الدائرة لحساب طول القوس $\widehat{AB}$.

• قيس الزاوية المركزية هو $35° + 12°$ أي $47°$.

• حساب نصف القطر AI. OIA قائم في I.



لدينا : $\sin 30° = \dfrac{AI}{OA}$

$$AI = OA \times \sin 30°$$

$$AI = 6380 \times \frac{1}{2} = 3190$$

$$AI = 3190 \text{ km}$$

• حساب طول القوس $\widehat{AB}$.

طول $\widehat{AB}$ هو $\dfrac{2\pi \times 3190}{360}$ أي طول $\widehat{AB}$ هو 2615 km بتقريب 1 km.

• مدة السفر هي المسافة على السرعة أي $\dfrac{2615}{800}$ أي $3h\ 16\ min$ بتقريب $1\ min$.

صحيح أو خاطئ

1 • 1 كل مستقيم يقطع كرة هو محور لها.

2 • مركز كرة هو مركز الدوائر الكبرى.

3 • مقطع كل مستو لجلة وفق قرص مركزه مركز الجلة.

4 • خطوط الطول كلها متقايسة و لها نفس المركز.

5 • دوائر العرض كلها متقايسة.

6 • حجم جلة صغيرة هو $1\ cm^3$. إذا ضربنا نصف قطرها في 5 نتحصل على جلة حجمها يمثل 25 مرات حجم الجلة الصغيرة.

7 • مقطع مستو لمكعب هو دائما مربع.

8 • مقطع مستو لجلة هو دائرة.

تمارين

الكرة و الجلة : تعريف وتمثيل

2 لكرة نصف قطر طوله 1,5 cm و O هو مركزها. (الشكل)

نعتبر مستقيما يقطع الكرة في نقطتين A و B.

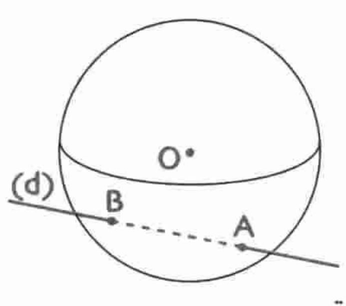
هل يمكن أن يكون :

؟ AB = 1 cm

؟ AB = 1,5 cm

؟ AB = 3 cm

؟ AB = 4 cm



• علّل إجابتك في كل حالة.

3 يقطع مستقيم (d) كرة مركزها O و نصف قطرها 2 cm في نقطتين A و B بحيث AB = 2 cm.

1 • برهن أن $\widehat{AOB} = 60°$.

2 • I هو منتصف [AB]. احسب OI.

4 A و B نقطتان من كرة مركزها النقطة O منتصف [AB] و نصف قطرها 2 cm.

M و N نقطتان بحيث :

$MA = MB$ و $\widehat{AMB} = 90°$.

• برهن أن M نقطة من الكرة.

5 • مثّل كرة مركزها O و [AB] قطرا لها، M و N نقطتين منها بحيث $\widehat{MON} = 90°$.

6 • مثّل جلة مركزها O و قطرها 3cm

M و N نقطتين منها بحيث :

$OM = ON = 1\ cm$ و $\widehat{MON} = 90°$.

7 • مثّل كرة مركزها O و نصف قطرها 1,5 cm و نقطة A منها تبعد بمسافة 0,5 cm عن أحد محاورها.

8 1 • مثّل كرة أرضية مبيّنا قطبيها (الشمالي و الجنوبي) خط الإستواء، خط طول غرينتش و إحدى دوائر العرض.

2 • إذا كان 6400 km هو نصف قطر الأرض، احسب المسافة التي تفصل القطب الشمالي و إحدى نقط خط الاستواء (يقصد بالمسافة أقصر مسافة التي يجب قطعها على سطح الأرض بإتباع أحد خطوط الطول)

مساحة كرة - حجم جلة

9 $\mathcal{A}$ هي مساحة كرة نصف قطرها R و $\mathcal{V}$ هو الحجم.

1 • برهن أن $\mathcal{V} = \dfrac{\mathcal{A} \times R}{3}$.

2 • احسب مساحة كرة نصف قطرها 12 cm.

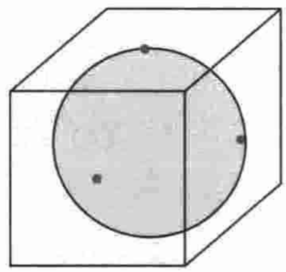
استنتج حجم الجلة.

تعطى النتائج بتقريب $1\ cm^2$ بالنسبة إلى المساحة و بتقريب $1\ cm^3$ بالنسبة إلى الحجم.

10 • احسب نصف قطر كرة مساحتها $12,56\ cm^2$ بتقريب $1\ mm$.
• احسب حجم الجلة بتقريب $1\ mm^3$.

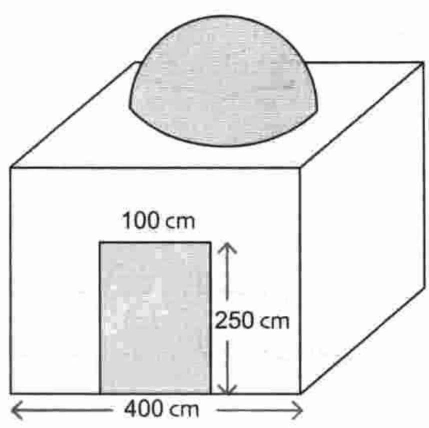
11 • احسب مساحة كرة نصف قطرها $1,5\ cm$ بوضع $\pi = 3,14$.
• احسب حجم الجلة الناتجة.

12 نضع كرة داخل مكعب ضلعه R بحيث تمس الكرة كل وجه من المكعب.



• احسب نصف قطر الكرة علما أن حجم المكعب هو $8\ cm^3$.

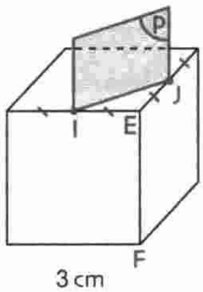
13 يمثل الشكل المقابل مبنى مكون من مكعب و نصف كرة قطرها $300\ cm$.
في هذا المبنى خصّص باب كما هو مبين في الشكل.
• ما هي كتلة الجير اللازمة لطلي المبنى علما أن $1\ kg$ من الجير يغطي $4\ m^2$ ؟
(تعطى الكتلة بتقريب $1\ kg$)



14 جلة من حديد مفرغة قطرها الخارجي $12\ cm$ و سمكها $2\ cm$.
• ما هو حجم الحديد المكونة منه ؟

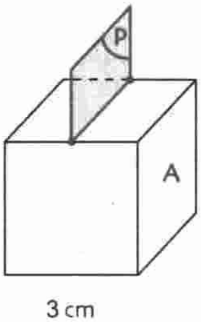
المقاطع المستوية لمجسمات مألوفة

15 • ارسم بالقياسات الحقيقية مع التعليل المقاطع التالية للمستوي (P) مع المكعب في كل من الحالتين 1 و 2.



(1)

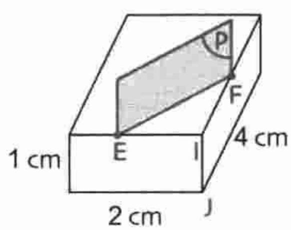
• (P) يشمل منتصفي حرفين و يوازي الحرف [EF].



(2)

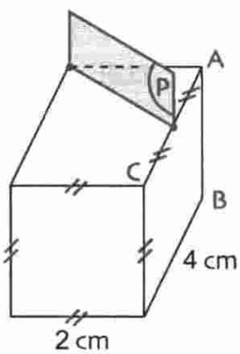
• (P) يوازي الوجه A.

16 • ارسم بالقياسات الحقيقية مع التعليل مقاطع المستوي (P) لمتوازي المستطيلات التالي في كل من الحالتين 1 و 2.



(1)

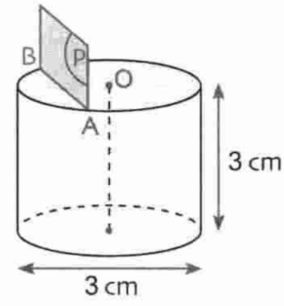
• $EF = 2\ cm$
• (P) يوازي الحرف [IJ].



(2)

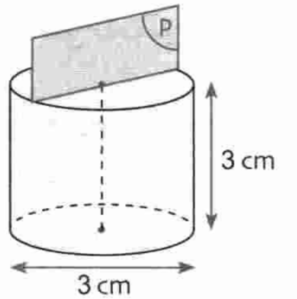
• (P) يوازي الحرف [AB] ويشمل منتصف [AC].

17 • ارسم بالقياسات الحقيقية مع التعليل مقاطع المستوي (P) للأسطوانة في كل من الحالتين 1 و 2.



(1)

• (P) يوازي محور الأسطوانة و AB = 2 cm.

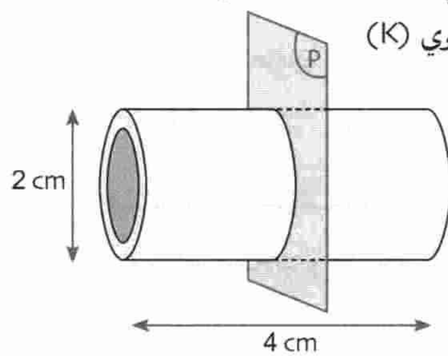


(2)

• (P) يشمل محور الأسطوانة.

18 • لاحظ الشكل ثم أرسم بالقياسات الحقيقية مقطع المستوي (P) للأنبوب الممثل علما أن (P) يوازي قاعدة الأنبوب الأسطواني و أن سمك الأنبوب هو 2 mm.

• ارسم مقطع لمستوي (K) للأنبوب علما أن (K) يشمل محور الأنبوب.



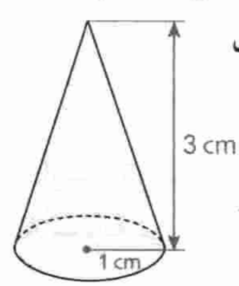
19 • ارسم بالقياسات الحقيقية مع التعليل مقطع المستوي (P) للكرة التي نصف قطرها 1,5 cm علما أن مركز المقطع يبعد عن مركز الكرة بمسافة 1 cm.

20 جلة خشبية نصف قطرها 2 cm تطفو على سطح مائي و تغمر داخل الماء بعمق 1 cm.

• ارسم بالقياسات الحقيقية مقطع المستوي المائي للكرة.

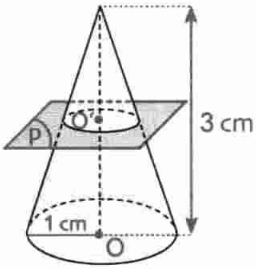
21 • ارسم بالقياسات الحقيقية مقطع المستوي (P) لمخروط الدوران الممثل في الشكل التالي :

المستوي (P) يشمل محور المخروط الدوراني الذي نصف قطر قاعدته 1 cm و ارتفاعه 3 cm.



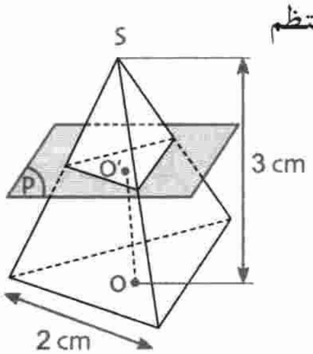
22 • ارسم بالقياسات الحقيقية مقطع المستوي (P) لمخروط الدوران الممثل في الشكل التالي :

علما أن OO′ = 1,5 cm.



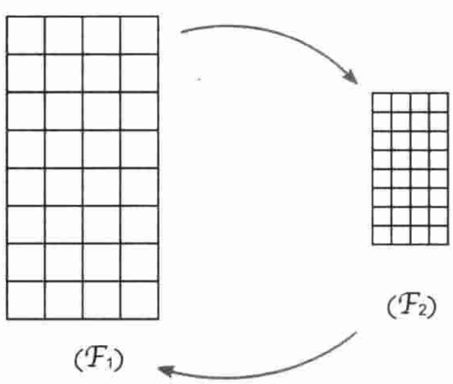
23 • ارسم بالقياسات الحقيقية مقطع المستوي (P) للهرم المنتظم الممثل في الشكل التالي :

بحيث المستوي يوازي القاعدة و OO′ = 2 cm.



التكبير و التصغير

24 لاحظ أبعاد المرصوفتين $(\mathcal{F}_1)$ و $(\mathcal{F}_2)$



ثم أكمل :

نسبة تكبير أبعاد $(\mathcal{F}_2)$ هي ....

نسبة تصغير أبعاد $(\mathcal{F}_1)$ هي ....

تضرب أبعاد $(\mathcal{F}_1)$ في .... للحصول على $(\mathcal{F}_2)$.

تضرب أبعاد $(\mathcal{F}_2)$ في .... للحصول على $(\mathcal{F}_1)$.

25 • استعمل مرصوفتي التمرين 24 لإتمام الجمل التالية :

تمثل مساحة $(\mathcal{F}_2)$ % .... من مساحة $(\mathcal{F}_1)$.

تمثل مساحة $(\mathcal{F}_1)$ % .... من مساحة $(\mathcal{F}_2)$.

26 يكبر نصف قطر كرة بنسبة 25 %.

1 • بأي نسبة مئوية تكبر مساحتها ؟

2 • بأي نسبة مئوية يكبر حجم الجلة ؟

27 ABC مثلث.

M و N منتصفا الضلعين [AB] و [AC] على الترتيب

(BN) و (CM) يتقاطعان في I.

1 • برهن أن المثلث IMN هو تصغير للمثلث BIC.

• ما هي نسبة التصغير ؟

2 • بأي نسبة يتم تصغير مساحة المثلث BIC ؟

28 ننجز تكبير لأبعاد مخروط دوران بنسبة 30 %.

• بأي نسبة يكبر حجمه ؟

مسائل

29 ارتفاع مخروط الدوران هو 8 cm و قطره 12 cm

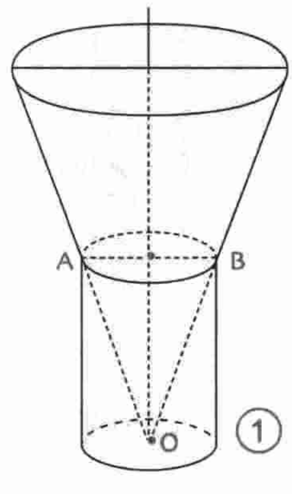
يقطع هذا المخروط بستو موازٍ للقاعدة عن بعد 5 cm من الرأس.

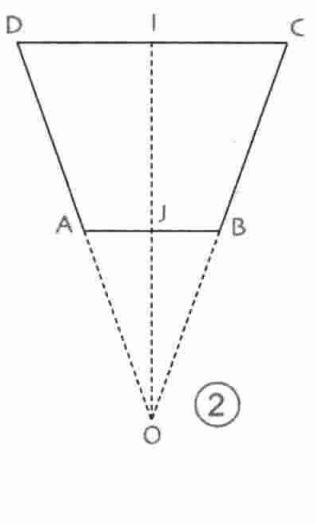
1 • ما هو قطر المخروط المحصل عليه ؟

2 • ما هي نسبة حجم هذا المخروط من حجم المخروط الأصلي ؟

30 يمثل الشكل 1 خزان ماء

(الجزء السفلي هو حامل الخزان).





الجزء العلوي هو جزئ من مخروط الدوران. الشكل 2 يمثل مقطع الجزء العلوي يشمل (OI) محور المخروط.

يعطى OI = 10 m و OJ = 5 m و AB = 3 m

• احسب سعة الخزان.

31 هرم منتظم إرتفاعه 8 cm و قاعدته على شكل مربع طول ضلعه 8 cm يوضع داخل مكعب طول حرفه 8 cm.

1 • احسب حجم كل من المكعب و الهرم.

ما هي نسبة حجم الهرم على حجم المكعب ؟

2 • نفس الأسئلة إذا عوضنا الهرم بمخروط الدوران قطر قاعدته 8 cm و إرتفاعه 8 cm.

قارن النسبتين.

32 تقع مدينتان A و B على خط الإستواء. خط طول A هو 10°E و خط طول B هو 25°E.

احسب المسافة التي تفصل A و B علما أن طول خط الاستواء هو 40000 km تقريبا.

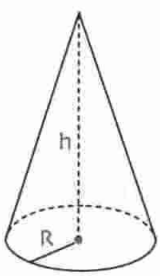
على أي خط طول تقع نقطة مقابلة للمدينة A على خط الاستواء ؟

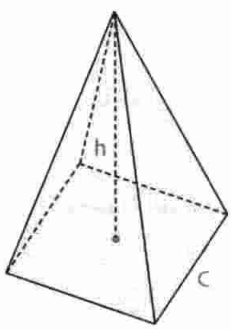
33 هرم منتظم قاعدته مربع و ضلعه C.

مخروط الدوران نصف قطره R.

للهرم و المخروط نفس الإرتفاع و الحجم.

• احسب النسبة $\frac{C}{R}$.





34 لمخروط الدوران نصف قطر R و لهرم منتظم مربع القاعدة نفس الإرتفاع h. و ضلع الهرم يساوي قطر المخروط.

• احسب نسبة حجم المخروط على حجم الهرم.

حلول التمارين والمسائل

- الأعداد الطبيعية و الأعداد الناطقة
- الحساب الحرفي - المتطابقات الشهيرة
- الجذور التربيعية
- المعادلات و المتراجحات من الدرجة 1 بمجهول واحد
- جمل معادلتين من الدرجة الأولى بمجهولين
- الدوال الخطية - التناسبية
- الدوال التآلفية
- الإحصاء
- خاصية طاليس
- حساب المثلثات في المثلث القائم
- الأشعة و الانسحاب
- المعالم
- الدوران- الزوايا و المضلعات المنتظمة
- الهندسة في الفضاء - الكرة - الجلة - المقاطع المستوية

1 - الأعداد الطبيعية و الأعداد الناطقة

1 الجمل الصحيحة هي 1 ؛ 2 ؛ 4 ؛ 6.

2 • مجموعة قواسم 27 هي $\{1 ; 3 ; 9 ; 27\}$

• مجموعة قواسم 45 هي $\{1 ; 3 ; 5 ; 9 ; 15 ; 45\}$

• مجموعة قواسم 84 هي $\{1; 2; 3; 4; 6; 7; 12; 14; 21; 28; 42; 84\}$

3 • مجموعة قواسم 288 هي

$\{1; 2; 3; 4; 6; 8; 9; 12; 16; 18; 24; 32; 36; 48; 72; 96; 144; 288\}$

• مجموعة قواسم 169 هي $\{1 ; 13 ; 169\}$

• مجموعة قواسم 225 هي $\{1 ; 3 ; 5 ; 9 ; 15 ; 25 ; 45 ; 75 ; 225\}$

4 • مجموعة القواسم المشتركة للعددين 42 و 56 هي $\{1 ; 2 ; 7 ; 14\}$

• مجموعة القواسم المشتركة للعددين 76 و 48 هي $\{1 ; 2 ; 4\}$

• مجموعة القواسم المشتركة للعددين 136 و 320 هي $\{1 ; 2 ; 4 ; 8\}$

5 • مجموعة القواسم المشتركة للعددين 73 و 75 هي $\{1\}$

• مجموعة القواسم المشتركة للعددين 44 و 66 هي $\{1 ; 2 ; 11 ; 22\}$

• مجموعة القواسم المشتركة للعددين 29 و 58 هي $\{1 ; 29\}$

6 حاصل القسمة هو 4 ؛ باقي القسمة هو 192.

$1284 = 273\times4 + 192$

7 أ) حاصل القسمة هو 2 ؛ باقي القسمة هو 612.

$2184 = 783\times2 + 618$

ب) حاصل القسمة هو 4 ؛ باقي القسمة هو 839.

$6951 = 1528\times4 + 839$

جـ) حاصل القسمة هو 22 ؛ باقي القسمة هو 335.

$8585 = 375\times22 + 335$

8 أ) مجموعة القواسم المشتركة هي $\{1 ; 2 ; 3 ; 6\}$

pgcd (18 ; 30) = 6

ب) مجموعة القواسم المشتركة هي $\{1 ; 7\}$

pgcd (14 ; 35) = 7

جـ) مجموعة القواسم المشتركة هي $\{1 ; 5 ; 25\}$

pgcd (75 ; 125) = 25

د) مجموعة القواسم المشتركة هي $\{1 ; 3 ; 9 ; 27\}$

pgcd (135 ; 108) = 27

9 أ)

$90 - 50 = 40$	$30 - 10 = 20$
$50 - 40 = 10$	$20 - 10 = 10$
$40 - 10 = 30$	$10 - 10 = 0$

إذن pgcd (90 ; 50) = 10

ب) pgcd (299 ; 235) = 1

جـ) pgcd (851 ; 667) = 23

د) pgcd (13 305 ; 7 983) = 2 661

10 pgcd (22 675 ; 14 512) = 907

11 أ)

$103 = 39\times2 + 25$

$39 = 25\times1 + 14$

$25 = 14\times1 + 11$

$14 = 11\times1 + 3$

$11 = 3\times3 + 2$

$3 = 2\times1 + 1$

$2 = 1\times2 + 0$

إذن pgcd (103 ; 39) = 1

ب) pgcd (749 ; 115) = 1

جـ) pgcd (7 595 ; 3 725) = 5

د) pgcd (224 512 ; 71 037) = 877

12

$222\,453 = 38\,520\times5 + 29\,853$

$38\,520 = 29\,853\times1 + 8\,767$

$29\,853 = 8\,767\times3 + 3\,552$

$8\,767 = 3\,552\times2 + 1\,663$

$3\,552 = 1\,663\times2 + 226$

$1\,663 = 226\times7 + 81$

$226 = 81\times2 + 64$

$81 = 64\times1 + 17$

$64 = 17\times3 + 13$

$17 = 13\times1 + 4$

$13 = 4\times3 + 1$

$4 = 4\times1 + 0$

إذن pgcd (222 453 ; 38 520) = 1

13 pgcd (201 ; 192) = 3

$\frac{192}{3} = 64$ ؛ $\frac{201}{3} = 67$

14 مجموعة القواسم المشتركة للعددين 54 و 79 هي $\{1\}$

العددان 54 و 79 أوليان فيما بينهما.

15 pgcd (125 ; 38) = 1

إذن العددان 125 و 38 أوليان فيما بينهما.

16 pgcd (259 ; 69) = 1

إذن العددان 259 و 69 أوليان فيما بينهما.

17 $pgcd\ (135 ; 108) = 27$ و $27 \neq 1$

إذن العددان 135 و 108 ليس أوليان فيما بينهما.

18 1. $pgcd\ (1080 ; 345) = 15$

2. $\frac{1080}{15} = 72$ ؛ $\frac{345}{15} = 23$

3. $pgcd\ (72 ; 23) = 1$

إذن العددان 72 و 23 أوليان فيما بينهما.

19 1. $pgcd\ (18\,440 ; 1\,384) = 8$

2. $\frac{1\,384}{8} = 173$ ؛ $\frac{18\,440}{8} = 2\,305$

3. $pgcd\ (2\,305 ; 173) = 1$

إذن العددان 2 305 و 173 أوليان فيما بينهما.

20 أ) مجموعة قواسم 54 هي $\{1 ; 2 ; 3 ; 6 ; 9 ; 18 ; 27 ; 54\}$

مجموعة قواسم 36 هي $\{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 6 ; 9 ; 12 ; 18 ; 36\}$

ب) مجموعة القواسم المشتركة للعددين 36 و 54 هي

$\{1 ; 2 ; 3 ; 6 ; 9 ; 18\}$

جـ) $pgcd\ (54 ; 36) = 18$

د) قواسم 18 هي 1 ؛ 2 ؛ 3 ؛ 6 ؛ 9 ؛ 18

مجموعة القواسم المشتركة للعددين 36 و 54 هي مجموعة قواسم 18.

21 1. 182 و 216 ليس أوليان فيما بينهما لأنهما عددان زوجيان.

2. 39 و 15 ليس أوليان فيما بينهما لأنهما يقبلان القسمة على 3.

3. 310 و 715 ليس أوليان فيما بينهما لأنهما يقبلان القسمة على 5.

22 • قواسم العدد 65 هي 1 ؛ 5 ؛ 13 ؛ 65.

• قواسم العدد 84 هي :

1 ؛ 2 ؛ 3 ؛ 4 ؛ 6 ؛ 7 ؛ 12 ؛ 14 ؛ 21 ؛ 28 ؛ 42 ؛ 84.

• القاسم المشترك الأكبر للعددين 65 و 84 هو 1.

• العددان 65 و 84 أوليان فيما بينهما.

23 $\frac{4}{14} = \frac{2}{7}$ ؛ $\frac{20}{35} = \frac{4}{7}$ ؛ $\frac{200}{450} = \frac{4}{9}$ ؛ $\frac{165}{390} = \frac{33}{78}$

24 $1 + \frac{2}{3} = \frac{5}{3}$ ؛ $3 + \frac{4}{7} = \frac{25}{7}$ ؛ $5 + \frac{1}{14} = \frac{71}{14}$

$2 - \frac{1}{3} = \frac{5}{3}$ ؛ $\frac{3}{15} - 3 = -\frac{14}{5}$ ؛ $-4 + \frac{48}{15} = -\frac{4}{5}$

25 $\frac{4242}{2844} = \frac{707}{474}$

24 $\frac{10\,316}{20\,194} = \frac{5158}{1097}$ ؛ $\frac{4198}{512} = \frac{2099}{256}$

$\frac{373\,020}{13\,184} = \frac{93\,255}{3296}$

27 $\frac{4920}{6835} = \frac{985}{1367}$

28 1. العددان 682 و 496 ليس أوليان فيما بينهما لأنهما عددان زوجيان.

2. $pgcd\ (496 ; 682) = 2$

3. $\frac{682}{496} = \frac{341}{248}$

29 1. $pgcd\ (65 ; 42) = 1$ إذن العددان 65 و 42 أوليان فيما بينهما.

2. $pgcd\ (520 ; 336) = 8$

$520 = 8 \times 65$ و $336 = 8 \times 42$ إذن $\frac{520}{336} = \frac{65}{42}$

30 • إذا وجد A، فإنه يقبل القسمة على 24.

يوجد عدد واحد مضاعف 24 و محصور بين 195 و 235 و هو العدد 216.

بحيث $pgcd\ (216 ; 288) = 24$

• العدد A هو 216.

31 أ) 5 و 7 أوليان فيما بينهما.

9 و 11 أوليان فيما بينهما.

13 و 15 أوليان فيما بينهما.

17 و 19 أوليان فيما بينهما.

25 و 27 أوليان فيما بينهما.

يمكن القول أن عددان طبيعيان فرديان و متتابعان هما عددان أوليان فيما بينهما.

ب) 1. d يقسم a و b إذن $a = kd$ و $b = ld$

وبالتالي : $a - b = (k - l)d$

إذن d يقسم $a - b$.

2. لدينا : $2n + 3 = (2n + 1) \times 1 + 2$

$2n + 1 = 2 \times n + 1$

إذن $pgcd\ (2n + 3\ ;\ 2n + 1) = 1$

و بالتالي العددان الطبيعيان $2n + 3$ و $2n + 1$ الفرديان هما عددان أوليان فيما بينهما.

32 1. $A = \frac{17}{2}$ ؛ $n = 9$

$A = \frac{34}{19}$ ؛ $n = 25$

$A = \frac{11}{8}$ ؛ $n = 46$

2. $A = \frac{n + 9}{n - 6} = \frac{n - 6 + 15}{n - 6}$ إذن $A = 1 + \frac{15}{n - 6}$

3. A عدد طبيعي إذا كان $n - 6$ يقسم 15 أي $n - 6$ يساوي 1 أو 3 أو 5 أو 15.

و بالتالي $n = 7$ أو $n = 9$ أو $n = 11$ أو $n = 21$.

33 1. $pgcd\ (110 ; 88) = 22$

2. ضلع كل مربع هو 22 cm.

عدد المربعات التي يمكن تقطيعها هو 4.

34 1. $pgcd\ (135 ; 108) = 27$

2. يمكن تشكيل 9 أكياس.

يوجد 4 أكياس يشمل كل واحد منها 27 كرية سوداء.

و 5 أكياس يشمل كل واحد منها 4 كريات حمراء.

35 1. $pgcd\ (540 ; 300) = 60$

2. ضلع البلاطة هو 60 cm.

عدد البلاطات هو 5.

36 1. $pgcd\ (182 ; 78) = 26$

2. عدد الباقات من نفس النوع هو 10.

يمكن تشكيل 3 باقات من أزهار الأقحوان و 7 باقات من أزهار البنفسج بكل واحدة 26 زهرة.

2 - الحساب الحرفي - المتطابقات الشهيرة

1 الجمل الصحيحة هي 3 ؛ 7.

2 $A = 10x + 30$ ؛ $B = -4 + 16x$

$C = 3y + 9$ ؛ $D = 144x + 288$

3 $A = 6x^2 + 15x$ ؛ $B = -4a + a^2$

$C = 2x^2 - 12x$ ؛ $D = \frac{3}{2}m + \frac{3}{4}m^2$

4 $A = 2x^2 + 3x + 6$ ؛ $B = 3y^2 - 10y + 3$

$C = 8t^2 + 32t + 14$ ؛ $D = -3z^2 - 8z + 3$

5 1. $E = 6x^2 - 5x - 6$

2. من أجل $x = 1$ ؛ $E = -5$

من أجل $x = 0$ ؛ $E = -6$

6 $A = 2x^2 + 3x - 2$

$B = -0{,}8y^2 + 12{,}4y - 6$

$C = -6z^2 + 3z + \frac{2}{3}$

7 $A = -4x^2 + 4x + 6$

$B = 2x^2 - 24$

$C = 4y^2 - 2y - 2$

8 1. $E = \left(x + \frac{1}{3}\right)(2x - 6) = 2x^2 - \frac{16}{3}x - 2$

2. $E = \left(2x + \frac{2}{3}\right)(x - 3) = 2x^2 - \frac{16}{3}x - 2$

3. طريقة ثانية : نشر الجداء $(x - 3)\left(x + \frac{2}{3}\right)$

ثم ضرب النتيجة في 2.

9 $A = (x - 2)(x + 3)$ ؛ $B = (y - 3)(-2y - 2)$

$C = (2m - 3)(m + 5)$

10 $A = 3x(x + 4)$ ؛ $B = 2(x - 2)(x + 2)$ ؛ $C = 6(x + 4)$

$D = x(x - 7)$ ؛ $E = x(-x + 1)$

11 $E = 50(40 - x)$ ؛ $F = 21(a + 3)$ ؛ $G = 7x(x + 4)$

12

$(x + 4)^2 = x^2 + 8x + 16$

$(2x - 3)^2 = 4x^2 - 12x + 9$

$(5 + x)^2 = 25 + 10x + x^2$

$(3y + 7)^2 = 9y^2 + 42y + 49$

$(20x + 4)^2 = 400x^2 + 160x + 16$

$(10a + 0{,}1)^2 = 100a^2 + 2a + 0{,}01$

13 1. $\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$

$2 \times \frac{2}{3} \times 5 = \frac{20}{3}$

$\left(\frac{2}{3}x + 5\right)^2 = 4x^2 + \frac{20}{3}x + 25$

2. $\left(\frac{5}{4}x + 3\right)^2 = \frac{25}{16}x^2 + \frac{15}{2}x + 9$

$\left(\frac{1}{7}x + 2\right)^2 = \frac{1}{49}x^2 + \frac{4}{7}x + 4$

14 $(101)^2 = (100 + 1)^2 = 10201$

$1001^2 = 1002001$

$72^2 = (70 + 2)^2 = 5184$

15 $A = 9x^2 - 5x + 7$ ؛ $B = -3x^2 - 28x - 60$

$C = 2x^2 - 14x - 16$ ؛ $D = 2x^3 + 3x^2 - 1$

16

$(x - 3)^2 = x^2 - 6x + 9$

$(2x - 4)^2 = 4x^2 - 16x + 16$

$(5 - x)^2 = 25 - 10x + x^2$

$\left(5 - \frac{1}{2}x\right)^2 = 25 - 5x + \frac{1}{4}x^2$

$\frac{1}{3}(4 - 3x)^2 = 3x^2 - 8x + \frac{16}{3}$

$(2 - 0{,}4x)^2 = 4 - 1{,}6x + 0{,}16x^2$

17 $69^2 = (70 - 1)^2 = 4671$ ؛ $78^2 = 6084$

$99^2 = 9801$ ؛ $999^2 = 998001$

18 $A = 10x^2 - 26x + 17$ ؛ $B = -17x^2 - 4x + 14$

$C = 13x^2 - 14x + 1$

19

$(4x - 1)(4x - 1) = 16x^2 - 1$

$(1 + 2x)(1 - 2x) = 1 - 4x^2$

$\left(\frac{1}{2}x - 1\right)\left(\frac{1}{2}x + 1\right) = \frac{1}{4}x^2 - 1$

$(7 + 3x)(7 - 3x) = 49 - 9x^2$

20 $31\times29 = (30 - 1)(30 + 1) = 899$ ؛ $102\times98 = 9996$

$612\times588 = (600 + 12)(600 - 12) = 359856$

21 $A = 9x^2 - 24x + 16$ ؛ $B = 4x^2 + x + \frac{1}{16}$

$C = 1$ ؛ $D = 9x^2 - 12x + 16$ ؛ $E = -7x^2 + 4x + 3$

$F = 3x^2 + 20x - 7$ ؛ $G = \frac{1}{2}x^2$

22 $A = (x + 6)^2$ ؛ $B = (2x + 1)^2$

$C = (4x + 3)^2$ ؛ $D = (8x + 2)^2$

23 $A = (3x - 1)^2$ ؛ $B = (5y - 1)^2$

$C = (3x - 3)^2$ ؛ $D = (10x + 2)^2$

24 $A = x^2 - 4x + 4$ ؛ $B = 4x^2 + 4x + 1$

$C = 16 + 8x + x^2$ ؛ $D = 49x^2 - 14x + 1$

25 $109^2 - 91^2 = (100 + 9)^2 - (100 - 9)^2 = 3600$

$502^2 - 498^2 = 4000$

26 $E = (9x + 5)^2$ ؛ $F = (11x + 2)^2$ ؛ $G = (2x - 6)(2x)$

27 $A = \left(4x - \frac{3}{2}\right)(4x + 1)$ ؛ $F = \left(\frac{4}{3}x - \frac{1}{2}\right)^2$

$C = (2x - 7)(4x - 3)$ ؛ $D = 12(x - 1)$

28 أ) $(b + c)^2 + (b - c)^2 = 2(b + c)^2$

ب) $AC = 8$ cm و $AB = 6$ cm

باستعمال نظرية فيثاغورث ينتج أن $BC = 10$ cm

29 $n^3 - n = n(n^2 - 1) = n(n - 1)(n + 1)$

الأعداد $n - 1$ ؛ n ؛ $n + 1$ هي أعداد طبيعية فردية متتابعة.

30 أ) مساحة المربع هي x^2

مساحة ربع الدائرة هي $\frac{\pi}{4} \times x^2$.

إذن مساحة الجزء الملون هي $\left(1 - \frac{\pi}{4}\right)x^2$

ب) في المربع الذي ضلعه $\frac{a}{4}$ ، مساحة الجزء الواحد غير الملون هو $\left(1 - \frac{\pi}{4}\right)\frac{a^2}{16}$

مساحة الجزء الملون في هذا المربع هو $\frac{a^2}{16} - \frac{a^2}{8}\left(1 - \frac{\pi}{4}\right)$

في المربع الذي ضلعه a، مساحة الجزء الملون هي $\frac{a^2}{4} - \frac{a^2}{2}\left(1 - \frac{\pi}{4}\right)$.

أي $\left(-\frac{1}{4} + \frac{\pi}{4}\right)a^2$

31 1• $A = (3 - 2x)^2$ ؛ $B = (-2x + 1)(-2x + 5)$

2• $C = (-2x + 1)(-2x + 5)$

3• من أجل $x = \frac{3}{2}$ ؛ $C = -4$ أي من أجل $x = \frac{3}{2}$. C عدد صحيح.

32 1• $A = 6x^2 + 3x - 108$

2• $4x^2 - 81 = (2x - 3)(2x + 3)$

$A = (2x + 3)(3x - 6)$

33 1• $E = 14x^2 - 9x - 18$

2• $6x - 9 = 3(2x - 3)$

$E = (2x - 3)(4x + 5)$

34 1• الشكل الذي مساحته $(x + 3) - 25$ هو، الشكل **3**.

2• $E = -x^2 - 6x + 16$

$E = (2 - x)(8 + x)$

من أجل $x = 2$ ؛ $E = 0$

3 - الجذور التربيعية

1 الجمل الصحيحة هي **1** ؛ **2** ؛ **5** ؛ **7** ؛ **11**.

2 $\sqrt{25} = 5$ ؛ $\sqrt{400} = 20$ ؛ $\sqrt{0,01} = 0,1$

$\sqrt{2500} = 50$ ؛ $\sqrt{1,44} = 1,2$ ؛ $\sqrt{0,0001} = 0,01$

3 $\sqrt{0} = 0$ ؛ $\sqrt{1} = 1$ ؛ $\sqrt{900} = 30$ ؛ $\sqrt{16900} = 130$

4 $\sqrt{1,21} = 1,1$ ؛ $\sqrt{0,49} = 0,7$ ؛ $\sqrt{2,25} = 1,5$ ؛ $\sqrt{2,89} = 1,7$

5 $\sqrt{10^2} = 10$ ؛ $\sqrt{10^4} = 10^2$ ؛ $\sqrt{10^6} = 10^3$

$\sqrt{10^8} = 10^4$ ؛ $\sqrt{10^{-2}} = 10^{-1}$ ؛ $\sqrt{10^{-8}} = 10^{-4}$

6 $\sqrt{0,001}^2 = 0,001$ ؛ $(5\sqrt{10})^2 = 250$ ؛ $(4\sqrt{3})^2 = 48$

$(2\sqrt{2})^2 = 8$ ؛ $\sqrt{204}^2 = 204$ ؛ $\sqrt{11}^2 = 11$

7 $\left(\sqrt{\frac{1}{3}}\right)^2 = \frac{1}{3}$ ؛ $\left(\sqrt{\frac{200}{3}}\right)^2 = \frac{200}{3}$ ؛ $\left(-\sqrt{\frac{7}{4}}\right)^2 = \frac{7}{4}$

$\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^2 = \frac{3}{2}$ ؛ $(-\sqrt{17})^2 = 17$ ؛ $(-\sqrt{5})^2 = 5$

8 $\sqrt{13^2} = 13$ ؛ $\sqrt{(-5)^2} = 5$ ؛ $\sqrt{(1 - \sqrt{2})^2} = \sqrt{2} - 1$

$\sqrt{\pi^2} = \pi$ ؛ $\sqrt{(\pi - 3)^2} = \pi - 3$ ؛ $\sqrt{(3 + \pi)^2} = 3 + \pi$

$\sqrt{(\pi - 5)^2} = 5 - \pi$ ؛ $\sqrt{(6 - \sqrt{6})^2} = 6 - \sqrt{6}$

9 $\sqrt{18} = 3\sqrt{2}$ ؛ $\sqrt{20} = 2\sqrt{5}$ ؛ $\sqrt{44} = 2\sqrt{11}$

$\sqrt{75} = 5\sqrt{3}$ ؛ $\sqrt{200} = 10\sqrt{2}$ ؛ $\sqrt{242} = 11\sqrt{2}$

10 $\sqrt{128} = 8\sqrt{2}$ ؛ $\sqrt{500} = 10\sqrt{5}$ ؛ $\sqrt{108} = 6\sqrt{3}$

$\sqrt{245} = 7\sqrt{5}$ ؛ $\sqrt{405} = 9\sqrt{5}$ ؛ $\sqrt{99} = 3\sqrt{11}$

$\sqrt{605} = 11\sqrt{5}$

11 $3\sqrt{2} = \sqrt{18}$ ؛ $2\sqrt{3} = \sqrt{12}$ ؛ $3\sqrt{3} = \sqrt{27}$

$5\sqrt{7} = \sqrt{175}$ ؛ $6\sqrt{11} = \sqrt{396}$ ؛ $4\sqrt{13} = \sqrt{208}$

12 $\sqrt{4\times16} = 8$ ؛ $\sqrt{100\times9} = 30$ ؛ $\sqrt{25\times81} = 45$

$\sqrt{121\times49} = 77$ ؛ $\sqrt{10^4\times10^{-2}} = 10$

13 $\sqrt{0{,}01\times4} = 0{,}2$ ؛ $\sqrt{64\times0{,}0001} = 0{,}08$

$\sqrt{0{,}25\times0{,}36} = 0{,}3$ ؛ $\sqrt{0{,}49\times1{,}21} = 0{,}77$

$\sqrt{245\times0{,}2} = 7$ ؛ $\sqrt{12{,}5\times8} = 10$

14 $\sqrt{5}\times\sqrt{20} = 10$ ؛ $\sqrt{8}\times\sqrt{2} = 4$ ؛ $\sqrt{3}\times\sqrt{27} = 9$

$\sqrt{3}\times\sqrt{12} = 6$ ؛ $\sqrt{8}\times\sqrt{0{,}5} = 2$ ؛ $\sqrt{0{,}1}\times\sqrt{360} = 6$

15 $\dfrac{\sqrt{242}}{\sqrt{2}} = \dfrac{11\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 11$

16 $\dfrac{\sqrt{18}}{\sqrt{2}} = 3$ ؛ $\dfrac{\sqrt{48}}{\sqrt{3}} = 4$ ؛ $\dfrac{\sqrt{224}}{\sqrt{2}} = 11$

$\dfrac{\sqrt{75}}{\sqrt{3}} = 5$ ؛ $\dfrac{\sqrt{448}}{\sqrt{7}} = 8$ ؛ $\dfrac{\sqrt{637}}{\sqrt{13}} = 7$

17 $\sqrt{\dfrac{25}{4}} = \dfrac{5}{2}$ ؛ $\sqrt{\dfrac{36}{49}} = \dfrac{6}{7}$ ؛ $\sqrt{\dfrac{144}{121}} = \dfrac{12}{11}$

$\sqrt{\dfrac{1}{324}} = \dfrac{1}{18}$ ؛ $\sqrt{\dfrac{400}{900}} = \dfrac{2}{3}$ ؛ $\sqrt{\dfrac{1}{2500}} = \dfrac{1}{50}$

18 $\dfrac{3}{\sqrt{2}} = \dfrac{3\sqrt{2}}{2}$ ؛ $\dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ ؛ $\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{10}}{2}$

$\dfrac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{8}} = \dfrac{\sqrt{8}+4}{8}$ ؛ $\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{6}} = \dfrac{\sqrt{18}-\sqrt{12}}{6}$

$\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{6}} = \dfrac{\sqrt{18}+\sqrt{12}}{6}$

19 $\dfrac{1}{\sqrt{2}-1} = \sqrt{2}+1$ ؛ $\dfrac{\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}} = \dfrac{3-\sqrt{3}}{2}$

$\dfrac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}-1} = \dfrac{6+2\sqrt{5}}{4}$ ؛ $\sqrt{2+1} = 2-\sqrt{2}$

$\dfrac{\sqrt{12}+\sqrt{27}}{1-\sqrt{3}} = \dfrac{5\sqrt{3}+15}{-2}$

20 $a = 4$. العدد a هو عدد طبيعي.

21 $\sqrt{0{,}4\times10^{-2}}\times\sqrt{16\times10^{5}} = 80$ ؛ $\sqrt{3\times10^{-3}}\times\dfrac{\sqrt{6\times10^{2}}}{\sqrt{7{,}5}} = \dfrac{\sqrt{6}}{5}$

$\dfrac{\sqrt{2{,}5\times10^{4}}}{\sqrt{9\times10^{3}}} = \dfrac{5}{3}$ ؛ $\dfrac{\sqrt{15\times10^{5}}\times\sqrt{3\times10^{-3}}}{\sqrt{5\times10^{5}}} = \dfrac{3\sqrt{10}}{100}$

22 $3\sqrt{2}+5\sqrt{8} = 13\sqrt{2}$ ؛ $4\sqrt{3}+2\sqrt{12} = 8\sqrt{3}$

$\sqrt{8}+3\sqrt{18} = 11\sqrt{2}$ ؛ $7\sqrt{45}-\sqrt{20} = 19\sqrt{5}$

$8\sqrt{50}-\sqrt{98} = 33\sqrt{2}$ ؛ $\sqrt{19}-5\sqrt{76} = -9\sqrt{19}$

23 من أجل $x = \sqrt{2}$ ؛ $A = 2+2\sqrt{2}$

من أجل $x = 3\sqrt{2}$ ؛ $A = 18+4\sqrt{2}$

من أجل $x = -2\sqrt{2}$ ؛ $A = 8-\sqrt{2}$

من أجل $x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ ؛ $A = \dfrac{1}{2}+\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$

من أجل $x = 2-\sqrt{2}$ ؛ $A = 8-4\sqrt{2}$

من أجل $x = 1+\sqrt{2}$ ؛ $A = 6+3\sqrt{2}$

24 $\sqrt{2}(\sqrt{2}+\sqrt{3}) = 2+\sqrt{6}$ ؛ $\sqrt{2}(\sqrt{2}-\sqrt{3}) = 2-\sqrt{6}$

$\sqrt{3}(\sqrt{6}-\sqrt{3}) = 2\sqrt{3}-3$

$5\sqrt{10}(\sqrt{20}+2\sqrt{15}) = 50\sqrt{2}+50\sqrt{6}$

25 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}\left(\sqrt{2}+\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = \dfrac{3}{2}$ ؛ $\dfrac{\sqrt{3}}{3}(\sqrt{3}-6) = 1-2\sqrt{3}$

$\sqrt{3}\left(\sqrt{6}-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right) = 3\sqrt{2}-1$ ؛ $2\sqrt{5}\left(\sqrt{5}+\dfrac{1}{\sqrt{5}}\right) = 12$

26 $(5+\sqrt{3})^2 = 28+10\sqrt{3}$ ؛ $(1+\sqrt{2})^2 = 3+2\sqrt{2}$

$(\sqrt{2}-\sqrt{3})^2 = 5-2\sqrt{6}$ ؛ $(5-\sqrt{3})(5+\sqrt{3}) = 22$

$(\sqrt{7}-\sqrt{5})(\sqrt{7}+\sqrt{5}) = 2$ ؛ $(2\sqrt{3}+3\sqrt{2})^2 = 30+12\sqrt{6}$

$\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 = \dfrac{5}{6}+\dfrac{\sqrt{6}}{3}$ ؛ $(\sqrt{5}-2\sqrt{3})^2 = 17-4\sqrt{15}$

27 $\sqrt{2}+\sqrt{10} = \sqrt{2}(1+\sqrt{5})$ ؛ $\sqrt{6}+\sqrt{3} = \sqrt{3}(\sqrt{2}+1)$

$3+\sqrt{3} = \sqrt{3}(\sqrt{3}+1)$ ؛ $3\sqrt{10}-\sqrt{15} = \sqrt{5}(3\sqrt{2}-\sqrt{3})$

28 $x^2+2\sqrt{2}x+2 = (x+\sqrt{2})^2$ ؛ $x^2-2\sqrt{3}x+3 = (x-\sqrt{3})$

$3-x^2 = (\sqrt{3}-x)(\sqrt{3}+x)$ ؛ $2-9x^2 = (\sqrt{2}-3x)(\sqrt{2}+3x)$

$\dfrac{1}{2}x^2+\sqrt{2}x+1 = \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}x+1\right)^2$

29 حلا المعادلة $x^2 = 64$ هما 8 - و 8.

حلا المعادلة $x^2 = 289$ هما 17 - و 17.

حلا المعادلة $x^2 = 361$ هما 19 - و 19.

المعادلة $x^2 = -9$ لا تقبل حل.

30 المعادلة $x^2 = -4$ لا تقبل حل.

حلا المعادلة $x^2 = 100$ هما 10 - و 10.

حل المعادلة $x^2 = 0$ هو 0.

حلا المعادلة $x^2 = 1$ هما 1 و 1 -.

حلا المعادلة $x^2 = 0{,}01$ هما 0,1 و 0,1 -.

حلا المعادلة $x^2 = \dfrac{9}{25}$ هما $\dfrac{3}{5}$ و $-\dfrac{3}{5}$.

31 معاكس مربع a هو $-a^2$ ؛ مربع معاكس a هو $(-a)^2$

ضعف مربع a هو $2a^2$ ؛ مربع ضعف a هو $(2a)^2$

32 .1 $A+B = 2-\sqrt{2}$ ؛ $A-B = 4-3\sqrt{2}$

$A\times B = -7+5\sqrt{2}$. .2 $\dfrac{A}{B} = 1-\sqrt{2}$

33 $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1} = \dfrac{\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)}{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)} = 2-\sqrt{2}$

34 $A = 4\sqrt{2}$ ؛ $B = 20\sqrt{3}$

35 $C = 6\sqrt{3}$ ؛ $D = 6\sqrt{3}$

36 $C = -8\sqrt{5}$

37 $A+B = 6\sqrt{2}$ ؛ $A-B = -8$

$A^2 = 34-24\sqrt{2}$ ؛ $A\times B = 2$

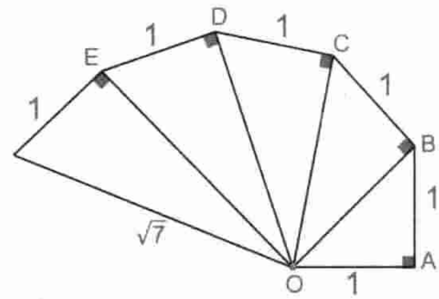
38 1. $\sqrt{1000} \times \sqrt{2} = \sqrt{2000}$ إذن طول المستطيل لا يساوي ضعف عرضه.

2. $\sqrt{2000} = 20\sqrt{5}$ ؛ $\sqrt{1000} = 10\sqrt{10}$

3. $\sqrt{2000} \times \sqrt{1000} = 1000\sqrt{2}$

4. $2\left(\sqrt{2000} + \sqrt{1000}\right) = 20\sqrt{5}\left(2 + \sqrt{2}\right)$

39 $OB = \sqrt{2}$ ؛ $OC = \sqrt{3}$ ؛ $OD = 2$ ؛ $OE = \sqrt{5}$



40

$\sqrt{8}$	$\sqrt{98}$	$\sqrt{72}$
$\sqrt{162}$	$\sqrt{50}$	$\sqrt{2}$
$\sqrt{50}$	$\sqrt{18}$	$\sqrt{162}$

$\sqrt{3}$	$\sqrt{432}$	$\sqrt{588}$	$\sqrt{147}$
$\sqrt{47}$	$\sqrt{675}$	$\sqrt{243}$	$\sqrt{108}$
$\sqrt{507}$	$\sqrt{12}$	$\sqrt{192}$	$\sqrt{363}$
$\sqrt{768}$	$\sqrt{75}$	$\sqrt{27}$	$\sqrt{300}$

41 x هو قطر المربع. $x = a\sqrt{2}$

42 1. h هو ارتفاع ؛ $h = a\frac{\sqrt{3}}{2}$

2. الإرتفاعات الثلاثة متقايسة.

43 $AC = 4\sqrt{5}$ ؛ $AD^2 = AC^2 + DC^2 = 80 + 1$ إذن $AD = 9$

44 1. $C = 3\sqrt{2}$ ؛ 2. $b = \sqrt{5}$

45 في الحالة 1 $x^2 + y^2 = z^2$ إذن المثلث ABC قائم في $\hat{C}$.

في الحالة 2 $x^2 + z^2 = y^2$ إذن المثلث ABC قائم في $\hat{B}$.

4 - المعادلات و المتراجحات من الدرجة الأولى بمجهول واحد

1 الجمل الصحيحة هي 1 ؛ 2 ؛ 3 ؛ 5 ؛ 6 ؛ 7 ؛ 11.

2 العدد 1 حل للمعادلة $3x - 2 = x$.

3 $\frac{2}{3}$ ليس حل للمعادلة $x - 2 = \frac{4}{3}$.

4 $\frac{1}{4}$ هو حل للمعادلة $1 - x = \frac{3}{2} - 3x$.

5 -9 حل للمعادلة $x + 4 = -5$.

0 حل للمعادلة $x - 4 = -4$ ؛ $\frac{1}{2}$ حل للمعادلة $x + \frac{1}{2} = 1$.

$-\frac{1}{2}$ حل للمعادلة $x + 2 = \frac{3}{2}$ ؛ $\frac{7}{3}$ حل للمعادلة $x - \frac{1}{3} = 2$

$-0,8$ حل للمعادلة $x + 1,3 = 0,5$.

$5,8$ حل للمعادلة $3,1 = x - 2,7$.

$2,1$ حل للمعادلة $-4,7 = -6,8 + x$.

6 المعادلات هي : $x - 4 = 0$ ؛ $x + 4 = 8$ ؛ $x - 3 = 1$

7 $\frac{3}{2}$ حل للمعادلة $2x = 3$ ؛ $\frac{5}{4}$ حل للمعادلة $-4x = -5$

$\frac{1}{2}$ حل للمعادلة $-2 = -4x$ ؛ $-\frac{3}{7}$ حل للمعادلة $3 = -7x$

10 حل للمعادلة $\frac{1}{2}x = 5$ ؛ $\frac{15}{2}$ حل للمعادلة $3 = \frac{2}{5}x$

$\frac{8}{9}$ حل للمعادلة $\frac{3}{2}x = \frac{4}{3}$ ؛ $\frac{4}{5}$ حل للمعادلة $-\frac{8}{15} = -\frac{2}{3}x$

8 المعادلات هي : $-4x = 4$ ؛ $2x = -2$ ؛ $-x = 1$

9 $\frac{4}{3}$ حل للمعادلة $2x + 3 = 5x - 1$

$-\frac{8}{5}$ حل للمعادلة $3x - 6 = 8x + 2$

$\frac{11}{5}$ حل للمعادلة $2 - 4x = x - 9$

$\frac{1}{2}$ حل للمعادلة $1 + 5x = 10 - 13x$

-36 حل للمعادلة $\frac{2}{9}x + 1 = 5 + \frac{1}{3}x$

$\frac{21}{8}$ حل للمعادلة $-\frac{1}{2} + 3x = \frac{5}{3}x + 3$

$-\frac{48}{15}$ حل للمعادلة $1 + \frac{3}{4}x = \frac{3}{8}x - \frac{1}{5}$

$\frac{8}{3}$ حل للمعادلة $1 - \frac{1}{3}x = \frac{7}{3} - \frac{5}{6}x$

10 المعادلات هي :

$2x - 1 = -x + 2$ ؛ $-x + 2 = x$ ؛ $\frac{1}{2}x + 5 = \frac{3}{2}x + 4$

11 3 حل للمعادلة $4(x - 3) = 0$

-2 حل للمعادلة $-5(x + 2) = 0$

0 و $-\frac{1}{3}$ حلا للمعادلة $2x(3x + 1) = 0$

1 و -1 حلا للمعادلة $(1 + x)(1 - x) = 0$

$\frac{1}{4}$ و $-\frac{1}{4}$ حلا للمعادلة $(8x - 2)(8x + 2) = 0$

$\frac{1}{2}$ و 2 حلا للمعادلة $(2x - 1)(x - 2) = 0$

12 1. $x^2 - 5x = x(x - 5)$

2. 0 و 5 حلا للمعادلة $x^2 - 5x = 0$

13 1. $(x + 2)^2 + (x + 2)(2x - 1) = (x + 2)(3x + 1)$

2. حلا المعادلة هما -2 و $-\frac{1}{3}$.

14 1. $x^2 - 16 = (x - 4)(x + 4)$

2. حلا المعادلة هما -4 و 4.

15 1. $(x - 3)(x + 2) + (x - 3)^2 = (x - 3)(2x - 1)$

2. حلا المعادلة هما 3 و $\frac{1}{2}$.

16 1. $(4x - 2)^2 - 4x^2 = (2x - 2)(6x - 2)$

2. حلا المعادلة هما 1 و $\frac{1}{3}$.

17 1. $(5-2x)^2-36=(-1-2x)(11-2x)$

2. حلا المعادلة هما $\frac{11}{2}$ و $-\frac{1}{2}$.

18 1. $(4x-1)^2-(2x+3)^2=(6x+2)(2x-4)$

2. حلا المعادلة هما $-\frac{1}{3}$ و 2.

19 1. حلول المتراجحة هي -3 و -1.

20 1. حلول المتراجحة هي 2 ؛ 4 ؛ 5.

21 حلول المتراجحة $x-3<1$ هي الأعداد x حيث $x<4$.

حلول المتراجحة $x+3\geq -1$ هي الأعداد x حيث $x\geq -4$.

حلول المتراجحة $-6\leq x+7$ هي الأعداد x حيث $x\geq -13$.

حلول المتراجحة $-9>-8+x$ هي الأعداد x حيث $x\leq -1$.

حلول المتراجحة $x+\frac{1}{2}>2$ هي الأعداد x حيث $x>\frac{3}{2}$.

حلول المتراجحة $-\frac{2}{3}+x\leq\frac{1}{6}$ هي الأعداد x حيث $x\leq\frac{5}{6}$.

حلول المتراجحة $\frac{5}{12}>x-\frac{5}{4}$ هي الأعداد x حيث $x<\frac{5}{3}$.

حلول المتراجحة $-\frac{7}{10}\geq\frac{6}{5}+x$ هي الأعداد x حيث $x\leq -\frac{19}{10}$.

22 1. المتراجحتان هما $x-3\leq 0$ ؛ $x+5\leq 8$

23 حلول المتراجحة $3x<12$ هي الأعداد x حيث $x\leq 4$.

حلول المتراجحة $-4x>8$ هي الأعداد x حيث $x<-2$.

حلول المتراجحة $25\leq -5x$ هي الأعداد x حيث $x\leq -5$.

حلول المتراجحة $-36\geq 12x$ هي الأعداد x حيث $x\geq -3$.

حلول المتراجحة $\frac{1}{3}x>3$ هي الأعداد x حيث $x>9$.

حلول المتراجحة $-2\leq\frac{2}{5}x$ هي الأعداد x حيث $x\geq -5$.

حلول المتراجحة $-\frac{2}{3}x>\frac{2}{3}$ هي الأعداد x حيث $x<-1$.

حلول المتراجحة $-\frac{4}{5}\leq\frac{1}{3}x$ هي الأعداد x حيث $x\geq -\frac{12}{5}$.

24 المتراجحتان هما $-3x<6$ ؛ $-4x<8$

25 حلول المتراجحة $3x+2<x-2$ هي الأعداد x حيث $x<-2$.

حلول المتراجحة $4x-3\leq 4+2x$ هي الأعداد x حيث $x\leq\frac{7}{2}$.

حلول المتراجحة $3-3x>-9+3x$ هي الأعداد x حيث $x<2$.

حلول المتراجحة $3+4x\geq 13-16x$ هي الأعداد x حيث $x\geq\frac{1}{2}$.

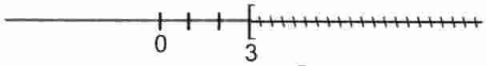
حلول المتراجحة $\frac{2}{9}x+2>\frac{1}{3}x+6$ هي الأعداد x حيث $x<-36$.

حلول المتراجحة $2x-\frac{1}{2}\geq 1+\frac{5}{3}x$ هي الأعداد x حيث $x\geq\frac{9}{2}$.

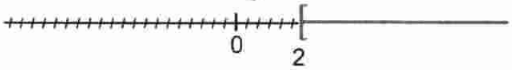
حلول المتراجحة $2+\frac{3}{4}x\leq\frac{3}{8}x-\frac{1}{5}$ هي الأعداد x حيث $x\leq -\frac{88}{15}$.

حلول المتراجحة $5-\frac{1}{3}x<\frac{7}{3}+\frac{5}{6}x$ هي الأعداد x حيث $x>\frac{16}{7}$.

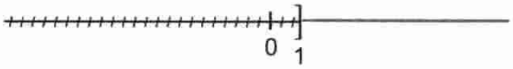
26 $x<3$



$x\geq 2$

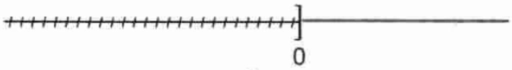


$x>1$

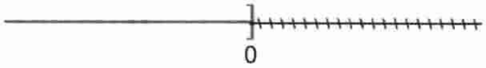


$x\leq 4$

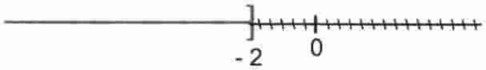
$x>0$



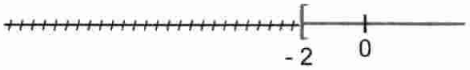
$x\leq 0$



$x\leq -2$

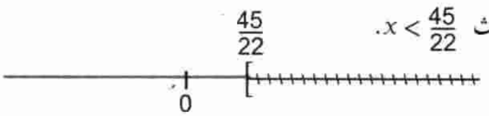


$x\geq -2$



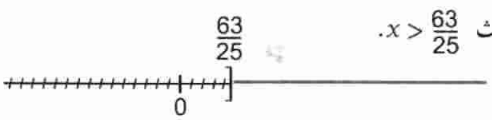
27 حلول المتراجحة $3(2x-6)+4(2x-3)<2x-5(2x-3)$

هي الأعداد x حيث $x<\frac{45}{22}$.



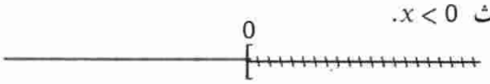
حلول المتراجحة $3(1-2x)-4(-2x-5)<3(x-7)-2(8-9x)$

هي الأعداد x حيث $x>\frac{63}{25}$.



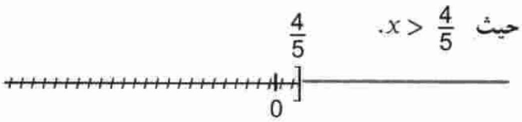
28 حلول المتراجحة $\frac{5x-1}{2}+4<1+\frac{2x+5}{2}$

هي الأعداد x حيث $x<0$.



حلول المتراجحة $\frac{x+5}{3}-x<\frac{x+1}{6}+\frac{1}{3}$

هي الأعداد x حيث $x>\frac{4}{5}$.



29 1. $3x+12=39$

2. حل المعادلة هو $x=9$.

طول القطعة الواحدة هو 9 (من بين القطع الثلاث المتقايسة).

30 1. $2x+56=180$

2. حل المعادلة هو 62.

قيس زاويتا القاعدة هو 62°.

31 الأعداد تحقق $n+(n+1)+(n+2)=573$

أي $3n=570$

إذن $n=190$

الأعداد هي 190 ؛ 191 ؛ 192.

32 العلاقة بين x، v، t هي $x = v \times t$

$x = 180\,km$ ، $v = 120\,km/h$ إذن $t = 1{,}5\,h$

أي مدة قطع المسافة $180\,km$ هي $1h\ 30min$.

33 x هو المداخيل الشهرية.

x حل المعادلة $x - 50\%x - \frac{1}{3}x = 2000$

ينتج أن $x = 12000$

المداخيل الشهرية هي 12000 دينارا.

34 العدد x هو حل المعادلة $x = \frac{5x - 64}{3}$ و هو 32.

35 x عرض و y طول المستطيل. $y = x + 9$

لدينا $2(x + y) = 82$ أي $2x + 9 = 41$

إذن $x = 16$ و $y = 25$.

36 x حل المعادلة $\frac{3 + x}{7 + x} = \frac{9}{10}$ ينتج أن $x = 33$.

37 1 • x عرض المستطيل و y طوله.

لدينا $2(x + y) > 25$ أي $2(y + 2{,}5) > 25$

2 • حل المتراجحة هي الأعداد y حيث $y > 10$.

3 • طول المستطل أكبر تماما من 10 cm.

38 $3n < 744$ أي $n < 248$ ؛ $n - 1 < 247$

العدد الأصغر من بين هذه الأعداد أصغر من 247.

39 • $v \leq 125$ إذن $vt \leq 125t$

$vt = 750\,km$ إذن $750 \leq 125t$

• حل المتراجحة هي الأعداد t حيث $t \geq 6$.

• المدة الأدنى لقطع المسافة $750\,km$ هي $6h$.

40 نضع $BM = x$ ؛ $AE = ED = 2$ ؛ لدينا $AM = 6 - x$

• مساحة ABDC هي $24\ cm^2$.

• مساحة EAM هي $(6 - x)$ ؛ مساحة MBC هي $(2x)$

مساحة EDC هي $6\ cm^2$.

إذن مساحة المثلث CEM هي $24 - (6 - x) - 2x - 6$

$\frac{1}{3}(24) \leq 24 - (6 - x) - 2x - 6$ أي $x \leq 4$.

يجب إختيار x حيث $BM \leq 4$.

5 - جمل معادلتين من الدرجة الأولى بمجهولين

1 الجمل الصحيحة هي 1 ؛ 5 ؛ 7 ؛ 8.

2 الثنائية $(1 ; 0)$ تحقق الجمل الثلاث.

إذن $(1 ; 0)$ حل لهذه الجمل.

3 الثنائية $(1 ; 2)$ حل للجملة $\begin{cases} x = 9 - 4y \\ 3y = 2x + 4 \end{cases}$

و للجملة $\begin{cases} 4x - 2 = y \\ 5x - 3y = -1 \end{cases}$

4 الثنائية $(1 ; 1)$ حل للجملة $\begin{cases} x + y = 2 \\ 3x + 4y = 7 \end{cases}$

5 الثنائية $(0 ; -2)$ حل للجملة $\begin{cases} 5x - y = 2 \\ x + 11y = -22 \end{cases}$

الثنائية $(2 ; 0)$ حل للجملة $\begin{cases} 3x + 5y = 6 \\ x - 4y = 2 \end{cases}$

6 قيمة y هي 3.

7 حل الجملة $\begin{cases} x = 2 \\ x + y = 7 \end{cases}$ هو $(2 ; 5)$

حل الجملة $\begin{cases} y = 0 \\ 4x - 5y = 4 \end{cases}$ هو $(1 ; 0)$

حل الجملة $\begin{cases} x = y \\ x + 2y = 0 \end{cases}$ هو $(0 ; 0)$

8 نضرب طرفي المعادلة $4x + 3y = 5$ في 2

و طرفي المعادلة $5x + 2y = 1$ في 3

نتحصل على الجملة $\begin{cases} 8x + 6y = 10 \\ 15x + 6y = 3 \end{cases}$

9 حل الجملة $\begin{cases} x + y = 10 \\ 6x + y = 19 \end{cases}$ هو $\left(\frac{9}{5} ; \frac{41}{5}\right)$

حل الجملة $\begin{cases} 5x - 10y = 35 \\ -9x - 6y = -15 \end{cases}$ هو $\left(\frac{5}{2} ; -\frac{9}{4}\right)$

حل الجملة $\begin{cases} 3x + 5y = 1 \\ x + 2y = 3 \end{cases}$ هو $(-13 ; 8)$

10 حل الجملة $\begin{cases} 4x + 3y = 5 \\ 2x + y = 2 \end{cases}$ هو $\left(\frac{1}{2} ; 1\right)$

حل الجملة $\begin{cases} 5u + t = 5 \\ 3u + 2t = 9 \end{cases}$ هو $\left(\frac{5}{7} ; \frac{24}{7}\right)$

حل الجملة $\begin{cases} a + 5d = 13 \\ 3a + 4d = 10{,}4 \end{cases}$ هو $(0 ; 2{,}6)$

11 حل الجملة $\begin{cases} 0{,}4r + 2s = 4 \\ 0{,}6r + s = 4 \end{cases}$ هو $(5 ; 1)$

حل الجملة $\begin{cases} 3z + 1{,}2w = 0{,}9 \\ 6z - 4w = 7{,}8 \end{cases}$ هو $\left(\frac{27}{40} ; -\frac{15}{16}\right)$

حل الجملة $\begin{cases} v - 3w = -4 \\ 7v + 10w = 34 \end{cases}$ هو $(2 ; 2)$

12 الجملة هي $\begin{cases} 2x + 2y = 30 \\ 2x + 4y = 54 \end{cases}$

نصف قطر القرصين هو y حيث $y = 12\text{ cm}$

عرض الإطار هو x حيث $2x + 2y = 30$ و بالتالي $x = 3\text{ cm}$.

13 الجملة هي $\begin{cases} 3x + 4y = 73 \\ 4x + 3y = 81 \end{cases}$

حيث x ثمن القلم الواحد و y ثمن المحاة.

حل الجملة هو $(15 ; 7)$.

و بالتالي ثمن القلم الواحد هو 15 دينار و ثمن المحاة الواحدة هو 7 دنانير.

14 x عرض المستطيل و y طوله.

الجملة هي $\begin{cases} x + y = 234 \\ x - y = -56 \end{cases}$ حل الجملة هو $(89 ; 145)$

أي طول المستطيل هو 145 cm و عرضه هو 89 cm.

15 x ثمن حبة البرتقال و y ثمن حبة الموز.

الجملة هي $\begin{cases} 3x + 2y = 40 \\ 2x + 3y = 35 \end{cases}$. حل الجملة هو $(10 ; 25)$

أي ثمن حبة البرتقال هو 10 دنانير وثمن حبة الموز هو 25 دينار.

16 x ثمن تذكرة الأطفال و y ثمن تذكرة الكبار.

الجملة هي $\begin{cases} 3x + y = 290 \\ 5x + 4y = 705 \end{cases}$. حل الجملة هو $(65 ; 95)$

أي ثمن تذكرة الأطفال هو 65 دينار وثمن تذكرة الكبار هو 95 دينار.

17 x ضلع المثلث المتقايس الأضلاع. y ضلع المثلث المتساوي الساقين.

الجملة هي $\begin{cases} 3x = 42 \\ x + 2y = 48 \end{cases}$. حل الجملة هو $(14 ; 17)$

طول ضلع المثلث المتقايس الأضلاع هو 14 cm.

طول ضلع المثلث المتساوي الساقين هو 17 cm.

18 a و b هما العددان.

الجملة هي $\begin{cases} a + b = 18 \\ (a - 5)(b - 4) = ab - 63 \end{cases}$

هذه الجملة تبسط كما يلي : $\begin{cases} a + b = 18 \\ 4a + 5b = 83 \end{cases}$ حل الجملة هو $(7 ; 11)$

19 a و b عددان يحققان الجملة :

$\begin{cases} \frac{a}{b} = \frac{7}{9} \\ b - a = 12 \end{cases}$ أي $\begin{cases} 9a - 7b = 0 \\ a - b = -12 \end{cases}$ حل الجملة هو $(42 ; 54)$

20 a و b عددان يحققان الجملة :

$\begin{cases} \frac{a}{b} = \frac{7}{12} \\ a + b = 95 \end{cases}$ أي $\begin{cases} 12a - 7b = 0 \\ a + b = 95 \end{cases}$ حل الجملة هو $(35 ; 60)$

21 الجملة هي $\begin{cases} a + b = 2003 \\ a = 8b + 77 \end{cases}$ ؛ $b < a$

حل الجملة هو $(1789 ; 214)$

22 1. حل الجملة $\begin{cases} 5x + 3y = 180 \\ x + y = 40 \end{cases}$ حل هذه الجملة هو $(10 ; 30)$

2. x هو النوع الأول و y هو النوع الثاني نتحصل على الجملة التالية :

$\begin{cases} x + y = 40 \\ 5x + 3y = 180 \end{cases}$ حل هذه الجملة هو $(30 ; 10)$

عدد الكتب ذات السمك 5 cm هو 30.

عدد الكتب ذات السمك 3 cm هو 10.

23 x هو عدد طوابع رضا و y هو عدد طوابع سمير.

نتحصل على الجملة التالية $\begin{cases} x + y = 144 \\ y + 2 = 2(x - 2) \end{cases}$

حل هذه الجملة هو $(94 ; 50)$

24 نحل الجملة $\begin{cases} 2(x + y) = 140 \\ 2(x - 7 + 2y) = 176 \end{cases}$ أي ، $\begin{cases} x + y = 70 \\ 2x + 4y = 190 \end{cases}$

حل هذه الجملة هو $(25 ; 45)$

25 نتحصل على الجملة التالية :

$\begin{cases} 4x = 2(x + y + 5) \\ x + 5 = 2y \end{cases}$ حل هذه الجملة هو $(10 ; 15)$

26 a هو عمر الأب و b هو عمر الإبن.

نتحصل على الجملة $\begin{cases} a = 3b \\ a + 11 = 2(b + 11) \end{cases}$ حل الجملة هو $(11 ; 33)$

عمر الأب هو 33 سنة ، عمر الإبن هو 11 سنة.

27 بترجمة المعطيات نتحصل على الجملة التالية

$\begin{cases} 2(x + y) = 100 \\ 3x + 5(y - 3) = 164 \end{cases}$

نتحصل أيضا على الجملة $\begin{cases} 2(x + y) = 50 \\ 3(x - 5) + 5y = 164 \end{cases}$

حل هذه الجملة هو $\left(\frac{71}{2} ; \frac{29}{2}\right)$ إذن $x = 35{,}5\text{ m}$ و $y = 14{,}5\text{ m}$.

28 1. مجموعة قواسم 24 هي $\{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 6 ; 8 ; 12 ; 24\}$

2. الثنائيات $(x ; y)$ من عددين طبيعيين بحيث $x^2 - y^2 = 24$ هي الثنائيات التي تحقق $(x + y)(x - y) = 24$ أي $x + y$ و $x - y$ قاسمان مرفقان للعدد 24.

هذه الثنائيات هي $(5 ; 1)$ و $(5 ; 7)$.

29 • نضع $d_1 = 20\,t_1$ و $d_2 = 50\,t_2$
و $d_1 + d_2 = 10$ و $t_1 = t_2 + \frac{1}{4}$

• نتحصل على الجملة $\begin{cases} 20\,t_1 + 50\,t_2 = 10 \\ t_1 - t_2 = \frac{1}{4} \end{cases}$

• حل هذه الجملة هو $\left(\frac{9}{28} ; \frac{5}{70}\right)$. بالتقريب $t_1 \approx 19 \text{ min } 12\text{s}$

و $t_2 \approx 4 \text{ min } 12\text{s}$ ينتج أن $d_1 = \frac{90}{14}$ km و $d_2 = \frac{25}{7}$ km

بالتقريب $d_1 \approx 36{,}428$ km و $d_2 \approx 3{,}571$ km

6 - الدوال الخطية - التناسبية

1 الجمل الصحيحة هي 1 ؛ 5 ؛ 6 ؛ 7 ؛ 8 ؛ 9 ؛ 10.

2 الدوال الخطية هي h ؛ k ؛ l.

3 الدوال f ؛ g ؛ h ؛ k معرفة بعبارة الشكل ax.
معامل f هو 15 ؛ معامل g هو 8 - ؛ معامل h هو 0,25 ؛ معامل k هو $-\sqrt{2}$

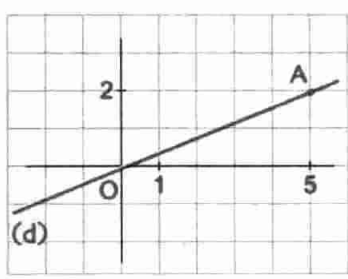
4 $f(15) = \frac{3}{4}$ ؛ $f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{3}{40}$ ؛ $f(-8) = -\frac{2}{5}$.

5 $f\left(\frac{1}{4}\right) = -\frac{1}{2}$ ؛ $f(-5) = 10$ ؛ $f\left(-\frac{1}{2}\right) = 1$.

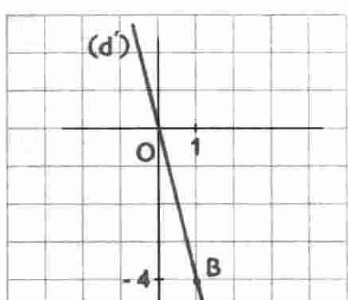
6 العدد الذي صورته هي 24 بالدلة f هو 3 -.

7 **1.** $f(0) = 0$ ؛ $f(1) = 1{,}4$ ؛ $f(2) = 2{,}8$.
2. العدد الذي صورته بالدالة f هي 7 - هو 5 -.

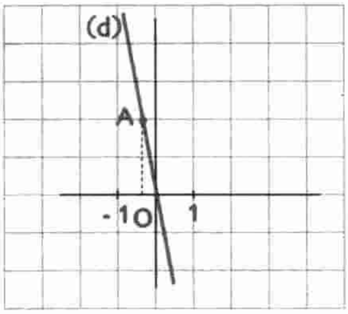
8 التمثيل البياني (d) للدالة f يشمل المبدأ O و النقطة A(5 ; 2).



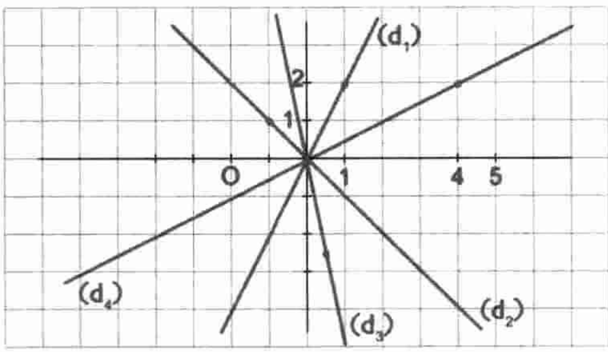
9 التمثيل البياني (d') للدالة g يشمل المبدأ O و النقطة B(1 ; - 4).



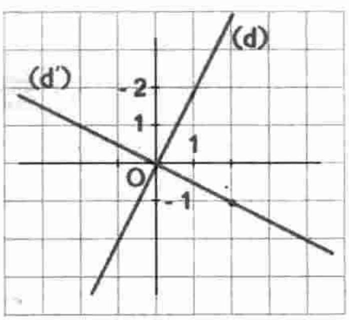
10 التمثيل البياني (d) للدالة f يشمل المبدأ O و النقطة $A\left(-\frac{1}{3} ; 2\right)$.
معامل f هو 6 -.



11 f هي الدالة ذات المعامل 2 و تمثلها (d_1).
g هي الدالة ذات المعامل 1 - و تمثلها (d_2).
h هي الدالة ذات المعامل 5 - و تمثلها (d_3).
k هي الدالة ذات المعامل 0,5 و تمثلها (d_4).



12 (d) هو التمثيل البياني للدالة f و هو التمثيل للدالة g.
(d) يشمل A(1 ; 2)
(d') يشمل B(2 ; - 1)
(d) و (d') متقاطعان في المبدأ O.



13 f معرفة كما يلي : $f(x) = -1{,}8x$

14 g معرفة كما يلي : $g(x) = \frac{4}{7}x$

15 h معرفة كما يلي : $h(x) = -\frac{2}{11}x$

16 **1.** صورة العدد 0 هي 0 ؛ صورة العدد 1 - هي $-\frac{2}{2}$.
2. العدد الذي صورته هي 1 هو 2.
3. الدالة الخطية f معرفة كما يلي : $f(x) = \frac{1}{2}x$.

17 **1.** صورة العدد 0 هي 0 ؛ صورة العدد 1 هي $-\frac{1}{2}$.
2. العدد الذي صورته هي 1,5 - هو 3.
3. الدالة الخطية g هي الدالة المعرفة كما يلي : $g(x) = -\frac{1}{2}x$.

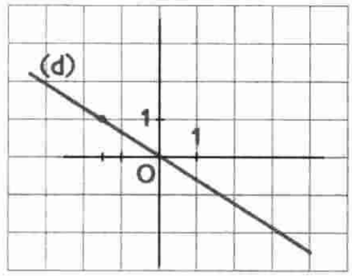
18 (d_1) هو تمثيل الدالة g.

(d_2) هو تمثيل الدالة f.

(d_3) هو تمثيل الدالة h.

19 النقطة A تنتمي إلى (d) لأن $f(-1{,}5) = 1$.

النقطة B لا تنتمي إلى (d) لأن $f(1) \neq -0{,}6$.



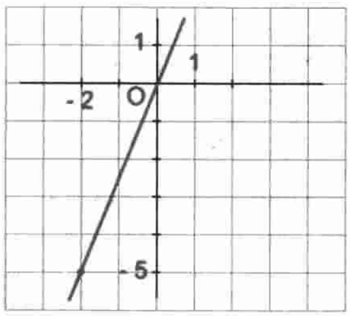
20 محيط مربع ضلعه x هو p حيث $p = 4x$.

p دالة خطية لـ x معاملها 4.

21 1• الجدول هو جدول تناسبية معامل التناسب هو 2,5.

2• $y = 2{,}5x$

3• التمثيل البياني لهذه الدالة هو المستقيم الذي يشمل المبدأ و النقطة التي إحداثياها هما $(-2\,;-5)$.



22 1• $f(x) = \frac{9}{100}x$

الدالة f دالة خطية معاملها $\frac{9}{100}$.

2• $g(x) = x - f(x)$ أي $g(x) = x - \frac{9}{100}x$

إذن g دالة خطية معاملها $\frac{91}{100}$.

23

k	0,385	2,7	0,73	1,82
نوع التغيير	تخفيض	زيادة	تخفيض	زيادة

24 • زيادة x بمقدار 10% هي $x + 10\%x$

• تخفيض $(x + 10\%x)$ بمقدار 10% هي $(x + 10\%x) - 10\%(x + 10\%x)$

أي $\left(x + \frac{10}{100}x\right)\left(1 - \frac{10}{100}\right)$ أي $\frac{90}{100}\left(x + \frac{10}{100}x\right)$

النتيجة المحصل عليها لا تساوي x.

25 يضرب l في العدد 1,38.

26 يضرب v في العدد $1 - \frac{64}{100}$ أي 0,36.

27 الزيادة هي 0,132 أي 13,2%.

28 تخفض m بنسبة 75%.

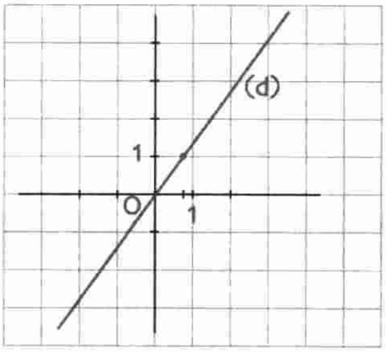
29 $1 > 0{,}91$ إذن يتعلق الأمر بتخفيض. $0{,}91 = 91\%$.

30 1• صورة العدد 3 هي 4.

2• العدد الذي صورته 6 - هو $-\frac{9}{2}$.

3• معامل الدالة الخطية هو $\frac{4}{3}$.

4•



5• $f\left(\frac{3}{4}\right) = 1$ إذن A تنتمي إلى (d).

$f(1) \neq -1$ إذن B لا تنتمي إلى (d).

31 $v = 16\pi h$

v دالة خطية.

معامل الدالة v هو 16π.

32 $g(12) = -\frac{1}{3}$ أي $12a = -\frac{1}{3}$ إذن $a = -\frac{1}{36}$

g معرفة كما يلي : $g(x) = -\frac{1}{36}x$

33 هذه المسافة هي تصغير للمسافة الحقيقية x.

y هي المسافة على الخريطة و x هي المسافة الحقيقية.

$y = \frac{1}{200000}x$.

المسافة على الخريطة دالة خطية للمسافة الحقيقية معاملها $\frac{1}{200000}$.

34 الثمن بعد التخفيض هو $x - 40\%x$ أي $0{,}6x$.

إذن الثمن بعد التخفيض هو دالة خطية معاملها 0,6.

35 الثمن بعد الزيادة هو $x + 3\%x$ أي $1{,}03x$.

إذن الثمن بعد الزيادة هو دالة خطية معاملها 1,03.

36 • مساحة المثلث هي $A = \frac{3}{2}x$.

• هذه المساحة هي دالة خطية معاملها $\frac{3}{2}$.

37 • مساحة المستطيل هي $A = 3x$.

• مساحة المستطيل هي دالة خطية معاملها 3.

• محيط المستطيل هو $P = 2(3 + x)$ أي $P = 6 + 2x$

إذن المحيط P ليس دالة خطية للعدد x.

38 • الجدول هو جدول تناسبية معامل التناسب هو $\frac{1}{70}$.
الدالة الخطية هي الدالة f المعرفة كما يلي : $f(x) = \frac{1}{70}x$.

39 • ثمن بيع المادة هو هو $140 + \frac{35}{100} \times 140$
أي 189 دينار.
• ثمن الشراء هو 131,625 دينار.

40 محيط الدائرة هو $L = 2\pi r$.
L هي دالة خطية معاملها 2π لنصف القطر r معاملها 2π.

41 1 • نضع x هي الكتلة التي تعطي تمددا قدره 5cm
$\frac{x}{5} = \frac{240}{6}$ أي $\frac{x}{5} = 40$
و بالتالي $x = 200\,g$.

2 • نضع y هي الكتلة التي يكون من أجلها طول النابض هو 28 cm .
$\frac{240}{6} = \frac{y}{28 - 18}$ أي $y = 400\,g$

42 1 • x هو مخزون سنة 2003.
$12000000 = (1 + 0,12)x$ أي $x = \frac{12000000}{1,12}$
$x \approx 10714285$ بتقريب $1\,m^3$.
2 • y هو مخزون سنة 2005.
$y = 12000000 \times (1 - 0,1)$ أي $y = 10800000\,m^3$

7 - الدوال التآلفية

1 الجمل الصحيحة هي 1 ؛ 2 ؛ 4 ؛ 6 ؛ 8 ؛ 9 ؛ 10.

2 الدوال التآلفية هي g ؛ h ؛ k ؛ p.

3 الدوال التآلفية هي f ؛ h ؛ k.
معاملا f هما 1 - و 2 - ؛ معاملا h هما 12 - و 0 ؛ معاملا k هما 0 و 0,25

4 $f\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{11}{2}$

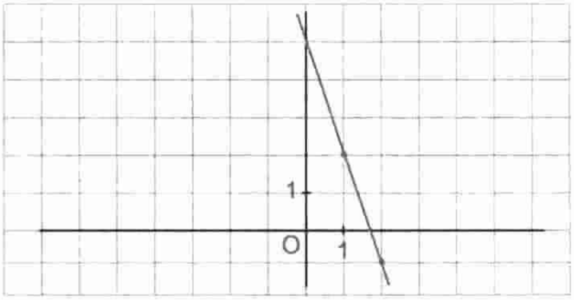
5 $g\left(\frac{1}{4}\right) = 5$ ؛ $g\left(\frac{3}{2}\right) = 0$.

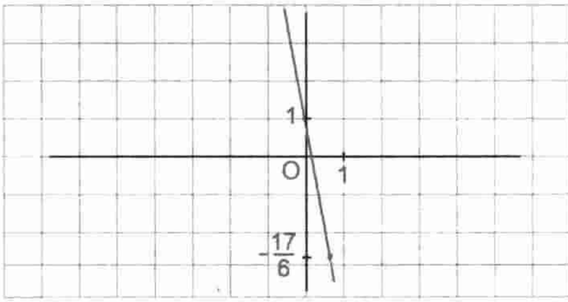
6 $f(4) = 22$ ؛ $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{9}{2}$ ؛ $f(-2,4) = -8$.

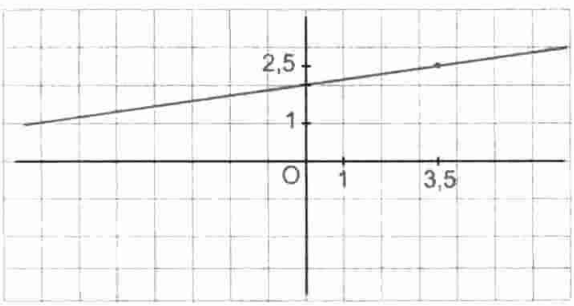
7 العدد الذي صورته 5 - بالدالة g هو 2 -.

8 العدد الذي صورته 3 بالدالة h هو $\frac{3}{4}$.

9 العدد الذي صورته 1 - بالدالة t هو $\frac{1}{2}$.

10


11


12


13 الدالة f معرفة كما يلي : $f(x) = \frac{3}{2}x - 4$.

14 الدالة g معرفة كما يلي : $g(x) = \frac{13}{10}x - 4$.

15 الدالة h معرفة كما يلي : $h(x) = \frac{2}{3}x - 5$.

16 الدالة t معرفة كما يلي : $t(x) = -x - \frac{1}{6}$.

17 الدالة k معرفة كما يلي : $k(x) = 3x - 7$.

18 الدالة p معرفة كما يلي : $p(x) = -14x + 22$.

19 1 • صورة العدد 2 - هي 1.
2 • العدد الذي صورته بالدالة f هي 2 - هو 1 -.

20 صورة العدد 1 هي 1 - ؛ صورة العدد 3 هي 3.
العدد الذي صورته 3 - بالدالة f هو 0.
العدد الذي صورته 1 بالدالة f هو 2.

21 الدالة f معرفة كما يلي : $f(x) = \frac{4}{5}x + \frac{7}{5}$.

22 الدالة g معرفة كما يلي : $g(x) = -\frac{3}{5}x + 3$.

23 $a = 3$ و $b = -3$

24 $a = -\frac{5}{6}$ و $b = 5$

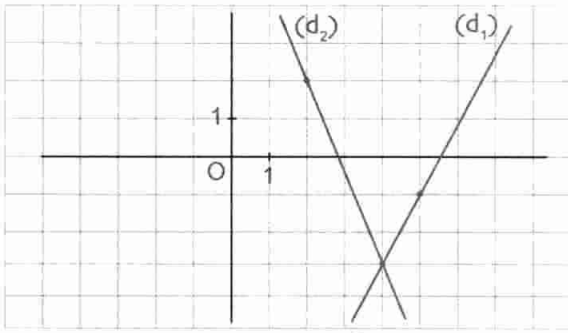
25 1 . معاملا f هما 2 و 11 - ؛ معاملا g هما $-\frac{5}{2}$ و 7.

2 . أ) $f(0) = -11$ ؛ $g(0) = 7$.

ب) العدد الذي صورته بالدالة f هي 0 هو $\frac{11}{2}$.

العدد الذي صورته بالدالة g هي 0 هو $\frac{14}{5}$.

3 .



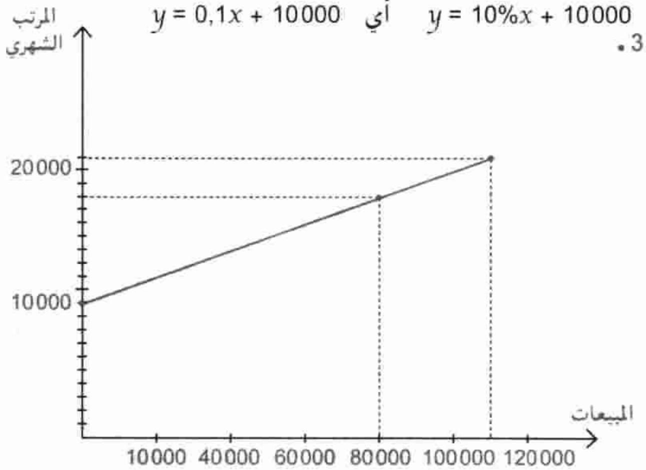
(d_1) تمثيل f ؛ (d_2) تمثيل g.

26 1 . الراتب الشهري هو $\frac{10 \times 60000}{100} + 10000$ أي 16000 دينار.

2 . y هو الراتب الشهري. x المبيعات المحققة.

$y = 10\%x + 10000$ أي $y = 0,1x + 10000$

3 .



4 . حساب مبلغ المبيعات إذا كان الراتب هو 18000 دينار.

نحل المعادلة $0,1x + 10000 = 18000$

فيكون 80000 دينار هو مبلغ المبيعات.

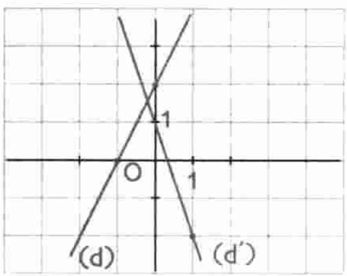
الراتب الشهري من أجل مبلغ المبيعات 110000 دينارا

هو $0,1\times 110000 + 10000$ أي 21000 دينارا.

27 . تعيين a و b حيث $f(5) = -\frac{11}{7}$ و $f(7) = -1$.

f معرفة كما يلي : $f(x) = \frac{2}{7}x - 3$.

28 1 . الشكل.



2 . حل المعادلة هو $-\frac{1}{5}$.

هذا الحل هو فاصلة نقطة تقاطع (d) و (d′).

8 - الإحصاء

1 الجمل الصحيحة هي 1 ؛ 3 ؛ 8 ؛ 10 ؛ 11.

2 1 . التكرار الكلي هو : 973.

2 . التكرارات المجمعة الصاعدة

القيم	0	1	2	3	4	5	6	7	8
التكرارات المجمعة الصاعدة	85	205	435	605	700	885	933	957	973

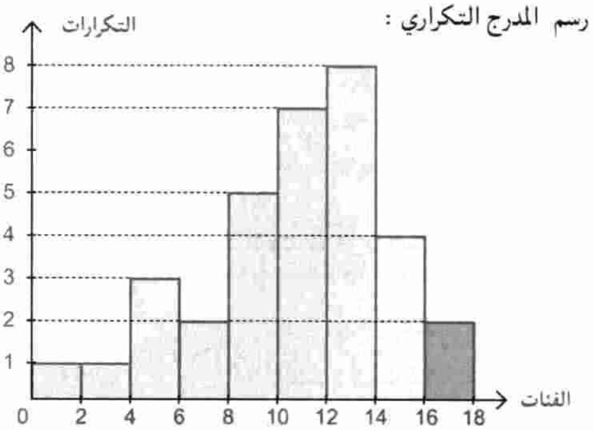
3 . عدد العائلات التي لها 6 ، 7 أو 8 أطفال هو 88.

(لأن $973 - 885 = 88$ أو $48 + 24 + 16 = 88$)

3 . التكرارات المجمعة الصاعدة للقيم :

الفئات	التكرارات	التكرارات المجمعة الصاعدة
[0 ; 2[	1	1
[2 ; 4[	1	2
[4 ; 6[	3	5
[6 ; 8[	2	7
[8 ; 10[	5	12
[10 ; 12[	7	19
[12 ; 14[	8	27
[14 ; 16[	4	31
[16 ; 18[	2	33

. رسم المدرج التكراري :



4

القيمة	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	المجموع
التكرار	0	3	1	3	2	0	3	1	4	3	20

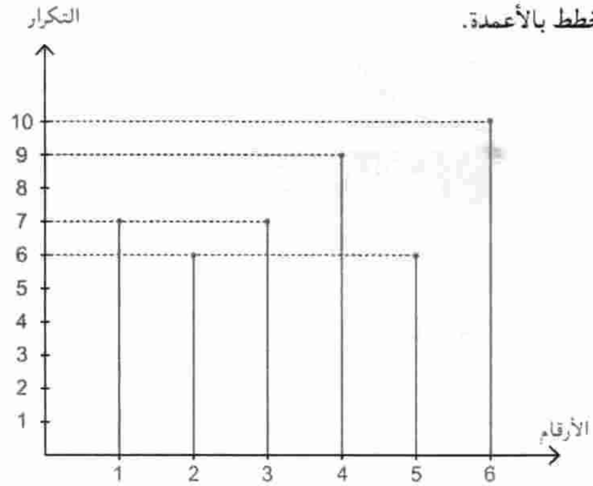
• حساب تواتر كل قيمة والتواترات المجمعة الصاعدة :

القيمة	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	المجموع
التواتر	0	$\frac{3}{20}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{3}{20}$	$\frac{2}{20}$	0	$\frac{3}{20}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{4}{20}$	$\frac{3}{20}$	1
التواتر المجمع الصاعد	0	$\frac{3}{20}$	$\frac{4}{20}$	$\frac{7}{20}$	$\frac{9}{20}$	$\frac{9}{20}$	$\frac{12}{20}$	$\frac{13}{20}$	$\frac{17}{20}$	1	

5

الرقم	1	2	3	4	5	6	المجموع
التكرار	7	6	7	9	6	10	45
التكرار المجمع الصاعد	7	13	20	29	35	45	
التواتر	$\frac{7}{45}$	$\frac{6}{45}$	$\frac{7}{45}$	$\frac{9}{45}$	$\frac{6}{45}$	$\frac{10}{45}$	1
التواتر المجمع الصاعد	$\frac{7}{45}$	$\frac{13}{45}$	$\frac{20}{45}$	$\frac{29}{45}$	$\frac{35}{45}$	1	

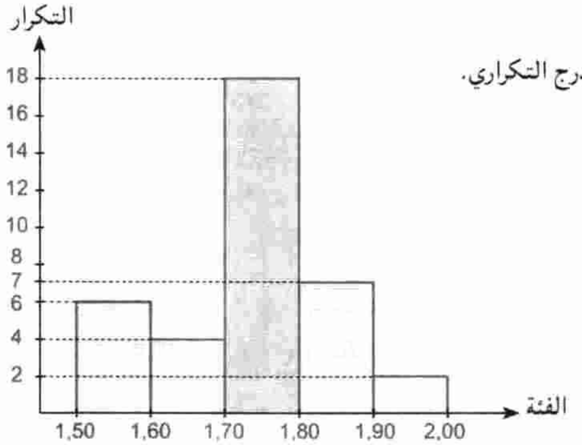
• المخطط بالأعمدة.



6 • حساب تواتر كل فئة و التواترات المجمعة الصاعدة.

القامة	[1,50 ; 1,60[	[1,60 ; 1,70[	[1,70 ; 1,80[	[1,80 ; 1,90[	[1,90 ; 2,00[
التكرار	6	4	18	7	2
التواتر	$\frac{6}{37}$	$\frac{4}{37}$	$\frac{18}{37}$	$\frac{7}{37}$	$\frac{2}{37}$
التواتر المجمع الصاعد	$\frac{6}{37}$	$\frac{10}{37}$	$\frac{28}{37}$	$\frac{35}{37}$	1

• المدرج التكراري.



7 • معدل رضا هو $\frac{99}{8}$ أي 12,4 بتقريب $\frac{1}{10}$ بالزيادة.

8 • معدل القسم هو $\frac{368}{34}$. أي 10,8 بتقريب 0,1 بالنقصان.

• تحصلت ليلى على علامة أكبر من معدل القسم.

9 • مراكز الفئات هي : 1,5 ، 4,5 ، 7,5 ، 10,5 ، 13,5 ، 16,5 على الترتيب.

• وسط السلسلة هو $\bar{x}$ حيث $\bar{x} = \frac{295,5}{27} \approx 10,94$

(بتقريب إلى $\frac{1}{100}$ بالنقصان).

10 العلامة الأخيرة هي m حيث :

$\frac{12 + 7 + 9 + 14 + 11 + 13 + 15 + m}{8} = 12$ أي $m = 13$.

11 معدل الرميات هو : $\frac{48 + m}{12}$ حيث m هي الرمية 12.

لدينا m يتغير من 1 إلى 6 إذن $48 + m > 48$ أي $\frac{48 + m}{12} > 4$

إذن معدل الرميات أكبر من 4 وبالتالي : رضا ليس على صواب.

12 مراكز الفئات هي : 142,5 ، 147,5 ، 152,5 ، 157,5 ، 162,5 ، 167,5 على الترتيب.

القامة المتوسطة هي h حيث $h = \frac{5210}{34}$

$h \approx 153,23$ بتقريب 1 cm.

13 معدل تلاميذ القسمين هو $\bar{x}$ حيث :

$$\bar{x} = \frac{10,5 \times 20 + 12,5 \times 28}{48} = \frac{560}{48}$$

إذن $\bar{x} \approx 11,66$ بتقريب $\frac{1}{100}$ بالنقصان.

14 وسط السلسلة هو 110 (بعد ترتيب قيمة السلسلة تصاعديا).

15 • وسيط السلسلة هو 64.

• إذا أضفنا قيمة إلى هذه السلسلة فإن وسيطها يتغير بحيث يكون يساوي وسط القيمتين المركزيتن.

• باضافة الوسيط : الوسيط الجديد هو 64.

• باضافة القيمة 65 مثلا يكون الوسيط الجديد هو 64,5.

16 1. وسيط السلسلة 1 هو 7,4. 3. وسيط السلسلة 3 هو 10.
2. وسيط السلسلة 2 هو 13. 4. وسيط السلسلة 4 هو 22.

17 وسط السلسلة هو 41,33 بتدوير إلى $\frac{1}{100}$.
وسيط السلسلة هو 43.

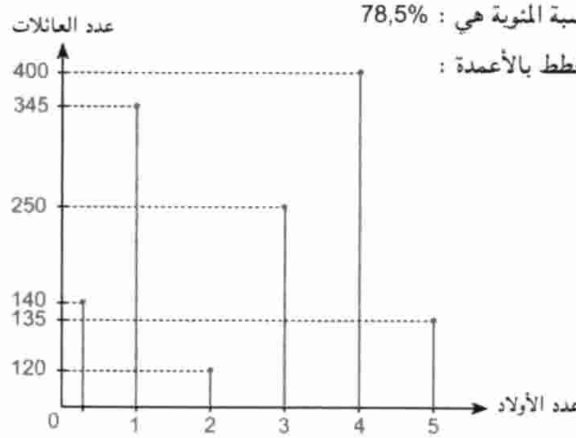
18 • معدل رضا هو 10,4. • وسيط علامات رضا هو 11.
• معدل سمير هو 10,8. • وسيط علامات سمير هو 10.
• معدل عمر هو 10,8. • وسيط علامات عمر هو 12.

19 • معدل القفزات هو $\frac{2269}{12}$ أي $189{,}08cm$ بتقريب $\frac{1}{100}$.
• وسيط القفزات هو 214 cm.

20 وسيط السلسلة هو 6 (لأن كل القيم لها نفس التكرار و هو 6).

21 1. وسط علامات رضا هو 15,33 بتدوير إلى $\frac{1}{100}$.
• وسط علامات سمير هو 16.
• وسط علامات ليلى هو 15,83 بتدوير إلى $\frac{1}{100}$.
2. الفرق بين أكبر علامة و أصغر علامة لكل تلميذ :
• رضا : الفرق هو 6. • سمير : الفرق هو 4. • ليلى : الفرق هو 10.
3. وسيط علامات رضا هو : 14,25 .
• وسيط علامات سمير هو : 16.
• وسيط علامات ليلى هو : 16,5.
• إختيار ليلى لتمثيل الإكمالية يعود إلى أن لديها أكبر وسيط.

22 1. العدد المتوسط للأولاد هو $\frac{3610}{1390}$ أي 2,59 بتدوير إلى $\frac{1}{100}$.
وهو ما يمثل 3 أولاد في كل عائلة. (بتقريب $\frac{1}{100}$ بالزيادة)
2. النسبة المئوية هي : 78,5%
3. المخطط بالأعمدة :



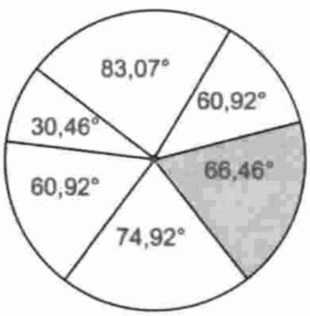
23 1.

المعيار(cm)	التكرارات
[5,5 ; 6[	16
[6 ; 6,5[	24
[6,5 ; 7[	27
[7 ; 7,5[	22
[7,5 ; 8[	11
[8 ; 8,5[	30

2. عدد حبات التفاح ذات معيار 7cm على الأقل هو 63.
3. النسبة المئوية هي : 25,38%
4.

الزاوية	التكرار	المعيار(cm)
44,30	16	[5,5 ; 6[
66,46	24	[6 ; 6,5[
74,76	27	[6,5 ; 7[
60,92	22	[7 ; 7,5[
30,46	11	[7,5 ; 8[
83,07	30	[8 ; 8,5[
360	130	المجموع

• المخطط الدائري :



• وسط السلسلة هو : 7,05 cm
• ينتمي هذا الوسط إلى الفئة [7 ; 7,5[

9 - خاصية طالس

1 الجمل الصحيحة هي 2 ؛ 3 ؛ 5 ؛ 6.

2 الوضعية 1 : يمكن تطبيق نظرية طالس : $\frac{6}{8} = \frac{x}{10} = \frac{y}{y+3}$
و بالتالي : $x = \frac{60}{8}$ أي $x = 7{,}5$
$6(y+3) = 8y$ و منه $x = 9$
الوضعية 2 : بتطبيق نظرية طالس :
لدينا : $\frac{30-y}{30} = \frac{14}{x} = \frac{15}{25}$ و بالتالي : $x = \frac{25\times14}{15}$ أي $x = \frac{70}{3}$
$25(30-y) = 30\times15$ و بالتالي $y = 12$

3 الوضعية 1 : حسب نظرية طالس
لدينا $\frac{4}{2} = \frac{y}{2} = \frac{x}{3}$ و بالتالي : $x = 6$ و $y = 4$
الوضعية 2 : حسب نظرية طالس
$\frac{x}{4} = \frac{y}{5} = \frac{2}{3}$ و بالتالي : $x = \frac{8}{3}$ و $y = \frac{10}{3}$

4 الوضعية 1 : حسب نظرية طالس
لدينا $\frac{x}{1} = \frac{x+2}{2} = \frac{y+3}{3}$
و بالتالي : $2x = x + 2$ إذن $x = 2$
و $6 = y + 3$ إذن $y = 3$

الوضعية 2 : حسب نظرية طالس لدينا :

$\frac{x+4}{4}=\frac{y+3}{3}=\frac{3}{2}$ و بالتالي : $2(x+4)=4\times3$

أي $x=2$ و $2(y+3)=3\times3$ أي $y=1,5$

5 الوضعية 1 : حسب نظرية طالس

لدينا $\frac{x}{8}=\frac{2}{y}=\frac{2}{6}$ و بالتالي : $x=\frac{8}{3}$ و $y=6$

الوضعية 2 : حسب نظرية طالس لدينا :

$\frac{x}{y}=\frac{x}{4}=\frac{2}{5}$: نجد $x=\frac{8}{5}$ أي $x=1,6$ و $y=4$

6 حسب نظرية طالس لدينا : $\frac{x}{4}=\frac{2}{3}=\frac{z}{6}=\frac{y}{6}$

و بالتالي : $x=\frac{8}{3}$; $y=4$; $z=4$

7 حسب نظرية طالس لدينا : $\frac{x}{1,5}=\frac{z}{0,5}=\frac{2,5}{y}=\frac{3}{2}$

و بالتالي : $x=2,25$; $y=\frac{5}{3}$; $z=0,75$

8 1. حسب نظرية طالس لدينا :

$$\frac{BC}{EF}=\frac{AB}{AE}=\frac{KB}{JE}=\frac{AK}{AJ}=\frac{AC}{AF}=\frac{KC}{JF}$$

2. $\frac{x}{1,5}=\frac{2}{4}$ أي $x=0,75$

9 1. حسب نظرية طالس لدينا : $\frac{BC}{EF}=\frac{AC}{AF}=\frac{AB}{AE}=\frac{BK}{EJ}=\frac{AK}{AJ}$

2. $\frac{2}{x}=\frac{1}{3}$ أي $x=6$

10 1. حسب نظرية طالس لدينا :

$$\frac{BC}{EF}=\frac{CA}{AF}=\frac{BA}{AE}=\frac{KA}{AJ}=\frac{BK}{EJ}=\frac{KC}{FJ}$$

2. $\frac{3}{x}=\frac{2}{4}$ أي $x=6$

11 1. حسب نظرية طالس لدينا :

$$\frac{BC}{EF}=\frac{CA}{AF}=\frac{BA}{AE}=\frac{BK}{EJ}=\frac{KA}{AJ}=\frac{KC}{FJ}$$

2. و بالتالي : $\frac{1}{x}=\frac{2}{3}$ أي $x=1,5$

12 $\frac{AB}{AE}=\frac{11}{33}=\frac{1}{3}$ و $\frac{AC}{AF}=\frac{15}{45}=\frac{1}{3}$ إذن $\frac{AB}{AE}=\frac{AC}{AF}$

لدينا أيضا النقط A، C، F على استقامة واحدة و بنفس ترتيب A، B، E

إذن حسب النظرية العكسية لنظرية طالس فإن المستقيمين (BC) و (EF) متوازيين.

13 $\frac{AB}{AF}=\frac{3}{26}$; $\frac{AC}{AE}=\frac{3,9}{4,5}$

$3\times4,5=13,5$; $2,6\times3,9=10,14$

إذن $\frac{AC}{AE}\neq\frac{AB}{AF}$ و بالتالي فإن (BC) لا يوازي (EF).

14 $\frac{BA}{AD}=\frac{2,4}{3}=0,8$; $\frac{AC}{AE}=\frac{2}{2,5}=0,8$

إذن $\frac{CA}{AE}=\frac{BA}{AD}$ و لدينا أيضا النقط B، A، D على استقامة واحدة.

النقط C، A، E على استقامة واحدة و بنفس ترتيب B، A، D

إذن المستقيمان (BC) و (ED) متوازيان.

15 $\frac{AC}{AF}=\frac{10}{12}$; $\frac{AB}{AE}=\frac{3}{4}=\frac{9}{12}$

إذن $\frac{AB}{AE}\neq\frac{AC}{AF}$ و بالتالي (BC) لا يوازي (EF).

16 في كل من الشكلين لدينا : $\frac{OB}{OE}=\frac{OC}{OF}=\frac{R}{R'}$

لدينا أيضا النقط B، O، E على استقامة واحدة.

C، O، F على استقامة واحدة و بنفس ترتيب النقط B، O، E

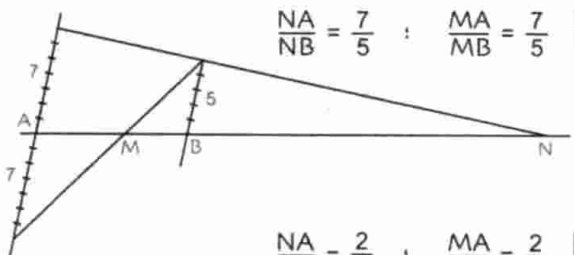
إذن المستقيمان (BC) و (EF) متوازيان.

17 $\frac{AB}{AE}=\frac{6}{9}=\frac{2}{3}$; $\frac{AC}{AF}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$ لدينا $\frac{AB}{AE}=\frac{AC}{AF}$

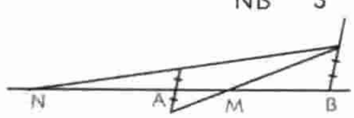
و لدينا أيضا A، C، F على استقامة واحدة و بنفس الترتيب A، B، E

حسب نظرية طالس فإن (BC) يوازي (EF).

18 $\frac{MA}{MB}=\frac{7}{5}$; $\frac{NA}{NB}=\frac{7}{5}$



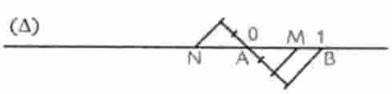
19 $\frac{MA}{MB}=\frac{2}{3}$; $\frac{NA}{NB}=\frac{2}{3}$



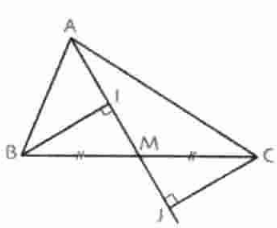
20 النقطتان M و N تحققان ما يلي :

$\frac{AN}{AB}=\frac{AM}{AB}=\frac{2}{3}$ مع أن N خارج [AB].

$M\left(\frac{2}{3}\right)$ و $N\left(-\frac{2}{3}\right)$



21 الشكل :



1. (BI) و (CJ) عموديان على نفس المستقيم (AM) إذن (BI) يوازي (CJ).

2. حسب نظرية طالس فإن :

$\frac{MA}{MC}=\frac{BI}{CJ}=1$ إذن $BI=CJ$

3. [BC] و [IJ] هما قطرا الرباعي BICJ. للقطرين [BC] و [IJ] نفس المنتصف M إذن الرباعي BICJ متوازي أضلاع.

22 (BI) و (CJ) متوازيان.

(BC) يوازي (EF). حسب نظرية طالس فإن $\frac{BH}{EJ}=\frac{OH}{OJ}$.

$\frac{5}{OJ}=\frac{\frac{3}{2}}{\frac{8}{2}}$ إذن $\frac{3}{8}OJ=5$ و $OJ=\frac{40}{3}$ أي $OJ\approx 13,3$ بتقريب $\frac{1}{10}$.

23 حسب نظرية طالس فإن : $\frac{AB}{AE}=\frac{BC}{EF}=\frac{OC}{OE}$

$\frac{6}{x+6}=\frac{3}{5}$: $3(x+6)=30$ و بالتالي $x=4$.

24 $\frac{DE}{DA}=\frac{DO}{DB}$ و $\frac{DO}{DB}=\frac{DF}{DC}$ و بالتالي : $\frac{DE}{DA}=\frac{DF}{DC}$

D، E، A على إستقامة واحدة. D، F، C على استقامة واحدة و بنفس ترتيب D، E، A.

حسب النظرية العكسية لنظرية طالس فإن (EF) يوازي (AC).

(AC) عمودي على (BD) و (AC) يوازي (EF)

إذن (EF) عمودي على (BD).

25 (FG) يوازي (BE) و (EK) يوازي (CF)

حسب نظرية طالس فإن : ① $\frac{AE}{AG}=\frac{AB}{AF}$

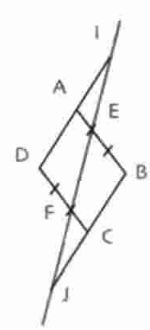
② $\frac{AE}{AC}=\frac{AK}{AF}$

من ① نستنتج : $AE\times AF=AG\times AB$

من ② نستنتج : $AE\times AF=AC\times AK$

إذن $AE\times AF=AG\times AB=AC\times AK$

26 الشكل.



1. حسب نظرية طالس فإن :

$\frac{EI}{IF}=\frac{1}{2}$ و $\frac{JF}{JE}=\frac{1}{2}$ إذن E منتصف [IF]

و F منتصف [JE] أي $IE=EF=FJ$.

2. $\frac{IA}{ID}=\frac{IE}{IF}=\frac{1}{2}$ إذن A منتصف [ID].

طول المتوسط [BA] في المثلث DBI هو 6

أي طول [AD] أي نصف طول الضلع [ID]

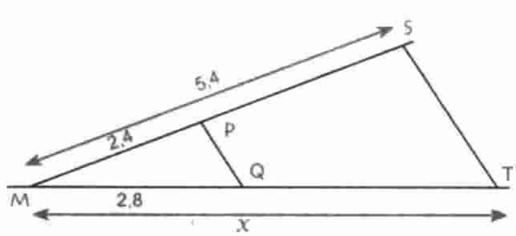
و بالتالي المثلث DBI قائم في B.

27 (ST) يوازي (PQ).

$\frac{x}{b}=\frac{c}{a}$

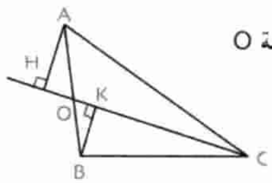
$\frac{x}{2,8}=\frac{5,4}{2,4}$

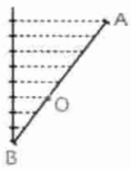
نقرأ: $x\approx 6,4$



28 $\frac{AH}{BK}=\frac{OA}{OB}$ ، يكفي إنشاء النقطة O من القطعة [AB] بحيث $\frac{5}{3}=\frac{OA}{OB}$.

يكفي تقسيم [AB] إلى 8 قطع متقايسة ثم تعيين النقطة O و رسم المستقيم (CO).



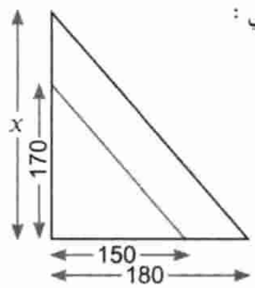


29 . نمثل الوضعية بالشكل التالي :

يوجد مثلثان في وضعية تناسب.

$\frac{x}{170}=\frac{180}{150}$

إذن $x=204cm$.



30 . نرسم المستقيم (A'B') و هو مستقيم منتصفي الضلعين [AC] و [BC].

إذن $(A'B')//(AB)$.

بتطبيق نظرية طالس في المثلثين A'GB' و AGB

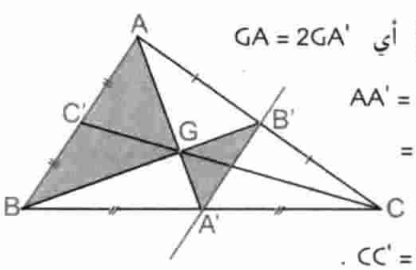
نجد: $\frac{GA'}{GA}=\frac{A'B}{AB}=\frac{1}{2}$ أي $GA=2GA'$

إذن $AA'=GA+GA'$

$=2GA'+GA'=3GA'$

بنفس الطريقة، نبرهن أن

$BB'=3GB'$ و $CC'=3GC'$.



10 - حساب المثلثات في المثلث القائم

1 الجمل الصحيحة هي 2 ؛ 5 ؛ 8.

2 $\tan\hat{O}=\frac{AB}{OA}=\frac{EF}{OF}$ ؛ $\sin\hat{O}=\frac{AB}{OB}=\frac{EF}{OE}$

3 $\widehat{AOB}=\widehat{EOF}$ إذن $\widehat{OBA}=\widehat{EOF}$

و $\cos\widehat{OBA}=\cos\widehat{OEF}$ إذن $\frac{AB}{OB}=\frac{EF}{OE}$

$\tan\widehat{AOB}=\tan\widehat{EOF}$ إذن $\frac{AB}{OA}=\frac{EF}{OF}$

4 $AB^2=9$ ؛ $BC^2=16$ ؛ $AC^2=25$

إذن $AC^2=BC^2+AB^2$

حسب النظرية العكسية لنظرية فيثاغورث فإن المثلث ABC قائم في B.

$\cos\hat{A}=\frac{AB}{AC}$ ؛ $\sin\hat{A}=\frac{BC}{AC}$ ؛ $\cos\hat{C}=\sin\hat{A}$ ؛ $\sin\hat{C}=\cos\hat{A}$

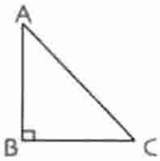
5 $BC^2 = 110,25$ ؛ $AB^2 = 196$ ؛ $AC^2 = 306,25$

إذن $AC^2 = BC^2 + AB^2$

حسب النظرية العكسية لنظرية فيثاغورث فإن المثلث ABC قائم في B.

6 1. $AB^2 = 60,84$ ؛ $BC^2 = 108,16$ ؛ $AC^2 = 169$

$AC^2 = BC^2 + AB^2$



إذن المثلث ABC قائم في B.

$\tan\hat{A} = \frac{BC}{AB}$ و $\tan\hat{C} = \frac{AB}{BC}$

$\tan\hat{A} = \frac{10,4}{7,8}$ و $\tan\hat{C} = \frac{7,8}{10,4}$

أي $\tan\hat{A} \approx 1,33$ و $\tan\hat{C} = 0,75$

7 $\tan 38° \approx 0,67$ بتقريب $\frac{1}{100}$.

8 $\tan 55° \approx 1,17$.

9 1. في المثلث ACB لدينا : $\sin\hat{C} = \frac{AB}{BC} = \frac{2}{4} = 0,5$

في المثلث EFC القائم في F لدينا : $\sin\hat{C} = \frac{EF}{EC}$

2. $EC = \frac{EF}{\sin\hat{C}} = \frac{1}{0,5} = 2$ إذن $EC = 2\,cm$

10

	المدور إلى $\frac{1}{10}$	المدور إلى $\frac{1}{100}$	المدور إلى $\frac{1}{1000}$
$\sin 56°$	0,8	0,77	0,770
$\cos 56°$	0,6	0,64	0,637
$\tan 56°$	1,2	1,21	1,209

11

	قيمة x مدورة إلى $\frac{1}{10}$	قيمة x مدورة إلى $\frac{1}{100}$
$\sin x = 0,52$	31,3°	31,33°
$\cos x = 0,25$	75,5°	75,52°
$\tan x = 1,37$	53,9°	53,87°

12
- إذا كان $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ فإن $x = 60°$ و هي قيمة مضبوطة.
- إذا كان $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ فإن $x = 45°$ و هي قيمة مضبوطة.
- إذا كان $\tan x = 2 + \sqrt{2}$ فإن $x = 67,5°$ و هي قيمة مضبوطة.
- إذا كان $\tan x = 2(\sqrt{2} + 2)$ فإن $x = 81,67°$ و هي مقربة إلى $\frac{1}{100}$.

13 لتكن x قيس الزاوية المطلوبة.

$\cos x = \frac{1,3}{2} = 0,65$ و بالتالي $x = 49,46°$.

و هي قيمة مدورة إلى $\frac{1}{100}$.

14 1. الضلع [AB] من المثلث ABC هو قطر الدائرة المحيطة به

إذن ABC قائم في C. [AB] هو وتره.

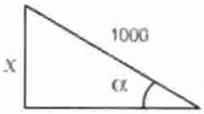
2. $AC = 3$ و $AB = 5$

$\cos\hat{A} = \frac{AC}{AB} = \frac{3}{5}$ و $\hat{A} = 53,13°$ بتقريب $\frac{1}{100}$.

$\hat{B} = 90° - \hat{A}$ أي $\hat{B} = 36,87$ بتقريب $\frac{1}{100}$.

15 ظل الزاوية التي يكونها الطريق مع السطح الأفقي هو 0,1.

إذن $\alpha \approx 5,71°$



$\sin\alpha = \frac{x}{1000} \approx 0,1$

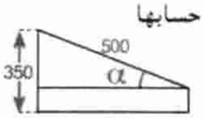
$1000\times0,1 = 100$ و بالتالي $x \approx 100\,m$

يرتفع الطريق بـ 100 m.

16 x هي الزاوية المطلوب حسابها.

$\tan x \approx 0,08$ إذن $x \approx 4,75°$

17 $350 - 40 = 310$ α هي الزاوية المطلوب حسابها



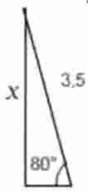
$\sin\alpha = \frac{310}{500} \approx 0,62$ و بالتالي $\alpha \approx 38°$

18 x هو ارتفاع العمارة.

$\tan 35° = \frac{x - 1,65}{50}$ إذن $x = 50\times\tan 35° + 1,65$

$\tan 35° = 0,7$: $x = 50\times0,7 + 1,65 = 36,65$ إذن $x \approx 36,65$

إرتفاع العمارة هو 36,65 m بتقريب $\frac{1}{100}$ أي بتقريب 1 cm.



19 x هو العلو المطلوب حسابه.

$\sin 80° = \frac{x}{3,5}$ إذن $x = 3,5\times\sin 80°$

$\sin 80° \approx 0,98$ و بالتالي $x = 3,45\,m$ بتقريب $\frac{1}{100}$.

20 1. المثلث OAB متساوي الساقين حيث OA = OB.

$\widehat{AOD}$ زاوية خارجية إذن $\widehat{AOD} = 2\widehat{OAB}$ و بالتالي $\widehat{OAB} = 15°$.

2. ABC مثلث قائم في B.

$\sin\widehat{OAB} = \frac{BC}{AC}$ و $\cos\widehat{OAB} = \frac{AB}{AC}$ ؛ $AC = 10$

$BC = AC\times\sin\widehat{OAB}$ و $AB = AC\times\cos\widehat{OAB}$

$\sin 15° \approx 0,26$ و $\cos 15° \approx 0,96$.

بعد التعويض نجد $AB \approx 9,6\,cm$ و هو الطول.

و $AB \approx 2,6\,cm$ و هو العرض.

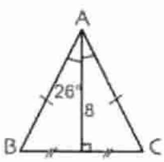
21 $OB = \sqrt{AB^2 - OA^2}$ أي $OB = \sqrt{25 - 9} = \sqrt{16} = 4$

$OB = 4cm$

$\sin\hat{B} = \frac{OH}{OB} = \frac{OA}{AB} = \frac{3}{5}$

$OH = 4\times\frac{3}{5} = 2,4$ إذن $OH = 2,6\,cm$

22 في المثلث ABC المتساوي الساقين



حيث AB = AC.

الارتفاع (AH) هو منصف $\widehat{BAC}$.

$\cos 26° = \frac{8}{AC}$

$AB = AC = \dfrac{8}{\cos 26°}$ أي $AB = AC = \dfrac{8}{0{,}65}$

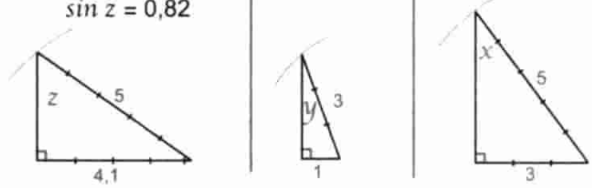
$AB = AC \approx \dfrac{8}{0{,}65} \approx 12{,}3$ ؛ $AB = AC \approx 12{,}3\ \text{cm}$

$\tan 26° = \dfrac{HC}{8}$ ؛ $BC = 2 \times HC$ أي $BC = 2 \times 8 \times \tan 26°$

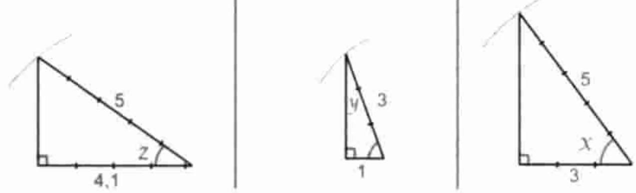
$BC \approx 16 \times 0{,}49$

$BC \approx 7{,}8\ \text{cm}$ بتقريب $1\ \text{mm}$

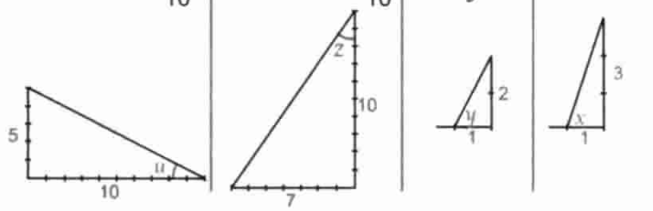
23 $\sin x = \dfrac{3}{5}$ | $\sin y = \dfrac{1}{3}$ | $\sin z = 0{,}82$; $0{,}82 = \dfrac{82}{100} = \dfrac{8{,}2}{10} = \dfrac{4{,}1}{5}$



24 $\cos x = \dfrac{3}{5}$ | $\cos y = \dfrac{1}{3}$ | $\cos z = 0{,}82$



25 $\tan x = 3$ | $\tan y = 2$ | $\tan z = 0{,}7 = \dfrac{7}{10}$ | $\tan u = 0{,}5 = \dfrac{5}{10}$



26
$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$
$$(0{,}8)^2 + \cos^2 x = 1$$
$$\cos^2 x = 1 - 0{,}64 = 0{,}36$$
$$\cos x = 0{,}6$$

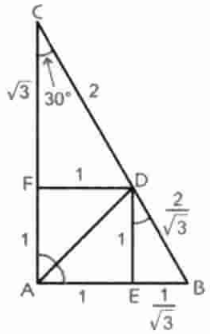
27
$$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$$
$$= 1 - 0{,}0625$$
$$= 0{,}937$$
$$\sin^2 x \approx 0{,}97$$
$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \approx \frac{0{,}97}{0{,}25} \approx 3{,}80$$

28
$$1 + \tan^2 A = 1 + \frac{\sin^2 A}{\cos^2 A} = \frac{\cos^2 A + \sin^2 A}{\cos^2 A} = \frac{1}{\cos^2 A}$$

29
$$\tan 21° = \frac{BC}{OC} = \frac{BC}{50 + AC}$$
$$BC = (50 + AC) \times \tan 21°$$
$$\tan 40° = \frac{BC}{AC}$$
$$BC = AC \times \tan 40°$$
$$AC \times \tan 40° = 50 \times \tan 21° + AC \tan 21°$$
$$AC(\tan 40° - \tan 21°) = 50 \tan 21°$$
$$AC = \frac{50 \tan 21°}{\tan 40° - \tan 21°} \approx \frac{50 \times 0{,}38}{0{,}84 - 038} \approx \frac{19}{0{,}46}$$
$$AC \approx 41{,}30$$
$$BC \approx 34{,}69$$

$BC = 34{,}7\ \text{m}$ بتقريب $1\ \text{acm}$

30 المثلث FDC نصف مثلث متقايس
الأضلاع و كذا المثلث DEB.
و كذلك المثلث CAB.
لاحظ الأطوال على الشكل.

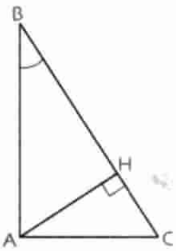


31
1. $\cos \hat{B} = \dfrac{BH}{AB} = \dfrac{AB}{BC}$
2. و بالتالي $AB^2 = BH \times BC$
3. و $AC^2 = CH \times BC$
4. $\widehat{CAH} = \hat{B}$

$\tan \hat{B} = \tan \widehat{CAH}$

$\dfrac{AH}{BH} = \dfrac{CH}{AH}$

و بالتالي $AH^2 = BH \times CH$



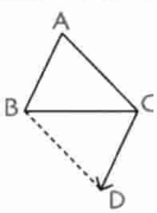
11 - الأشعة و الإنسحاب

1 الجمل الصحيحة هي 1 ؛ 4 ؛ 5 ؛ 7.

2

التعبير بشعاع	التعبير بمتوازي أضلاع	التعبير بانسحاب
$\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{EF}$	الرباعي BAFE متوازي أضلاع	A صورة B F صورة E
$\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{KL}$	الرباعي IJLK متوازي أضلاع	J صورة I L صورة K
$\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{HG}$	الرباعي EFGH متوازي أضلاع	H صورة E G صورة F

3 $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$
ABDC متوازي الأضلاع.



4 صورة A بالانسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{CD}$ هي النقطة D.
C هي صورة D بالانسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{AB}$.
صورة C هي B بالانسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{DA}$.

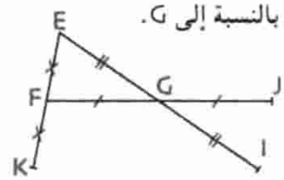
5 $\overrightarrow{EG} = \overrightarrow{GI}$ إذن I هي نظيرة E بالنسبة إلى G.

إذن $\overrightarrow{FG} = \overrightarrow{GJ}$

J هي نظيرة Fبالنسبة إلى G.

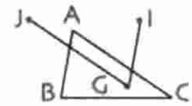
$\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{FK}$

إذن K هي نظيرة E بالنسبة إلى F.



6 $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{IG}$

$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{JG}$



7 $\overrightarrow{IJ}$ لا يساوي $\overrightarrow{AB}$ لأن منحنى $\overrightarrow{IJ}$ يختلف عن منحى $\overrightarrow{AB}$

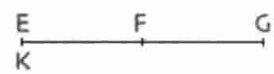
أي (IJ) لا يوازي (AB).

$\overrightarrow{KL}$ لا يساوي $\overrightarrow{AB}$ لأن طول $\overrightarrow{KL}$ لا يساوي طول $\overrightarrow{AB}$.

8 صورة A بالانسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{IB}$ هي النقطة I.

B صورة النقطة I بالانسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{AI}$.

9 $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{FG}$



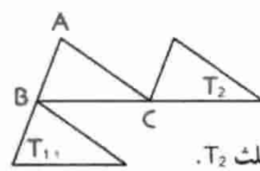
- G هي نظيرة E بالنسبة إلى F.
- $\overrightarrow{FK} = \overrightarrow{GF}$ إذن النقطة K منطبقة على النقطة E.

10 صورة المثلث ABC

بالانسحاب الذي شعاعه

$\overrightarrow{AB}$ هو المثلث T_1.

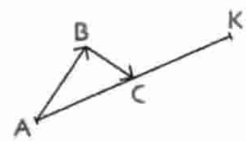
صورته بالانسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{BC}$ هو المثلث T_2.



11 $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{CK}$

$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CK}$

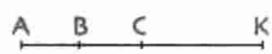
K هي نظيرة A بالنسبة إلى C.



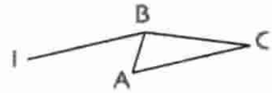
12 $\overrightarrow{CK} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CK}$

K هي نظيرة A بالنسبة إلى C.



13 $\overrightarrow{IB} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$

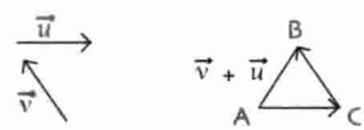


14 $\overrightarrow{JB} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$

15 $\overrightarrow{AC} = \vec{u}$

$\overrightarrow{CB} = \vec{v}$

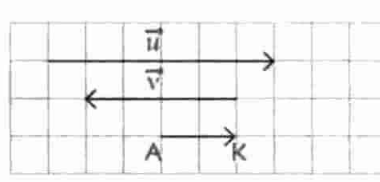
$\vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{AB}$



16 $\overrightarrow{AK} = \vec{u} + \vec{v}$

$\overrightarrow{AE} = \vec{u}$

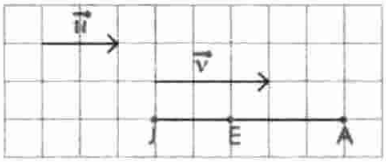
$\overrightarrow{EK} = \vec{v}$



17 $\overrightarrow{JA} = \vec{u} + \vec{v}$

$\overrightarrow{JE} = \vec{u}$

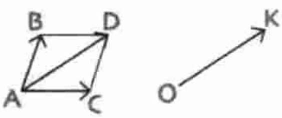
$\overrightarrow{EA} = \vec{v}$



18 $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}$

حيث ABDC متوازي أضلاع.

$\overrightarrow{OK} = \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$

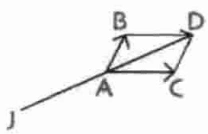


19 $\overrightarrow{JA} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}$ حيث ABDC

متوازي أضلاع. $\overrightarrow{JA} = \overrightarrow{AD}$

J هي نظيرة D بالنسبة إلى A.



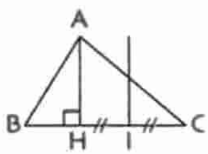
20 صورة المستقيم (AH) بالانسحاب

الذي شعاعه $\overrightarrow{HI}$ يشمل I منتصف [HC]

و يوازي (AH) إذن صورة (AH)

هو مستقيم المنتصفات في المثلث ACH

و بالتالي فإنه يشمل منتصف [AC].



21 EFG صورة ABC بالانسحاب

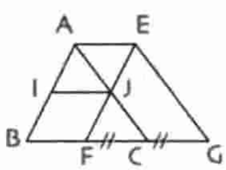
الذي شعاعه $\overrightarrow{IJ}$ و ينتج إذن

AE = IJ = BF = CG

IJFB متوازي أضلاع

إذن (FJ) يوازي (IB) أي يوازي (AB) و بما أن J منتصف [AC]

فإن F منتصف [BC]. ينتج أن BF = FC = CG.

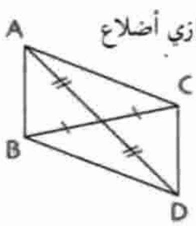


22 $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}$ إذن ABDC متوازي أضلاع

$\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CB}$

و $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BC}$

لأن ABDC متوازي أضلاع.



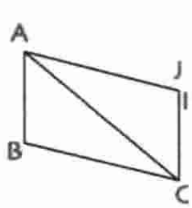
23 $\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{JA}$ و $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{IC}$

نلاحظ أن النقطتين I و J متطابقتان.

من $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{IC}$ ينتج $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AI}$.

من $\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{JA}$ ينتج $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AJ}$

و بالتالي $\overrightarrow{AJ} = \overrightarrow{AI}$ إذن I و J متطابقتان.

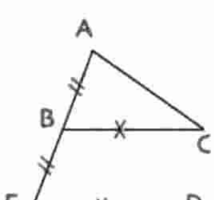


24 $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BE}$

$\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BC}$

من $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{ED}$ ينتج $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{CD}$.

و بما أن $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BE}$ فإن $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.



25 $\vec{AB} = \vec{BE}$

$\vec{AB} + \vec{AC} = \vec{AK}$

ACKB متوازي أضلاع

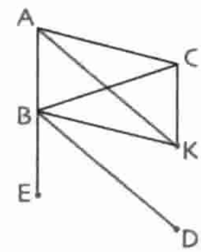
لدينا $\vec{AC} = \vec{BK}$ و بما أن $\vec{AB} = \vec{BE}$

فإن $\vec{BD} = \vec{BK} + \vec{BE}$.

BKDE متوازي أضلاع.

من $\vec{BK} = \vec{ED}$ و $\vec{AC} = \vec{BK}$

ينتج أن $\vec{AC} = \vec{ED}$.



12 - المعالم

1 الجمل الصحيحة هي 3 ؛ 5 ؛ 6.

2 $\vec{OA}(1;4)$ ؛ $\vec{OC}(-3;4)$ ؛ $\vec{OD}(4;-4)$ ؛ $\vec{OB}(4;0)$

$\vec{OE}(-4;0)$ ؛ $\vec{OF}(0;-3)$.

3 • $\vec{AB} + \vec{BC}(7;-6)$ لأن $\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$

• $\vec{CO} + \vec{OA}(-7;6)$ لأن $\vec{CO} + \vec{OA} = \vec{CA}$

• $\vec{DB} + \vec{BC}(8;-1)$ لأن $\vec{DB} + \vec{BC} = \vec{DC}$

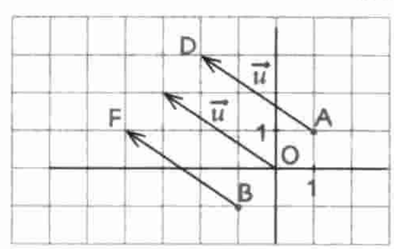
4 $\vec{AB}(3;1)$ ؛ $\vec{AC}(0;-4)$ ؛ $\vec{AB} + \vec{AC}(3;-3)$

$\vec{OB} + \vec{OC}(-1;1)$ ؛ $\vec{BA} + \vec{BO}(-4;-4)$

5 $\vec{u}(-3;2)$

$\vec{AD} = \vec{u}$

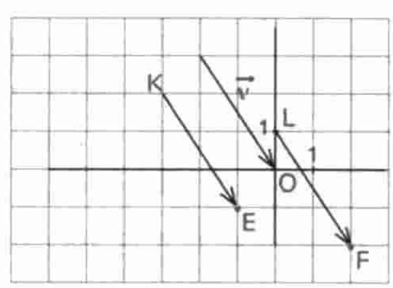
$\vec{BF} = \vec{u}$



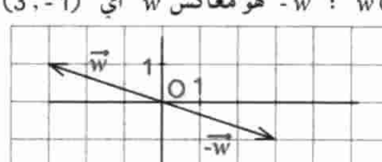
6 $\vec{v}(2;-3)$ ؛ $E(-1;-1)$ ؛ $F(2;-2)$

$\vec{KE} = \vec{v}$

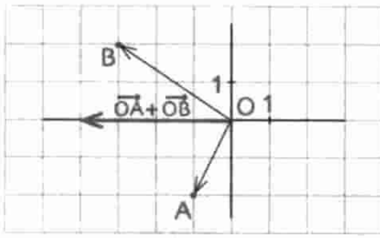
$\vec{LF} = \vec{v}$



7 $\vec{w}(-3;1)$ ؛ $-\vec{w}$ هو معاكس $\vec{w}$ أي $-\vec{w}(3;-1)$



8 $\vec{OA}(-1;-2)$ ؛ $\vec{OB}(-3;2)$ ؛ $(\vec{OA} + \vec{OB})(-4;0)$

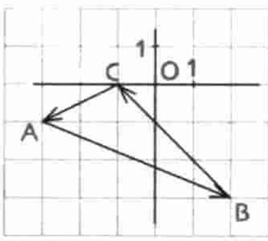


9 .1 $A(-3;-1)$ ؛ $B(2;-3)$

$C(-1;-0)$.

$\vec{AB}(5;-2)$ ؛ $\vec{BC}(-3;3)$

$\vec{CA}(-2;-1)$



.2 $\begin{cases} x_B - x_A = 5 \\ y_B - y_A = -2 \end{cases}$ $\begin{cases} x_C - x_B = -3 \\ y_C - y_B = 3 \end{cases}$ $\begin{cases} x_A - x_C = -2 \\ y_A - y_C = -1 \end{cases}$

10 $\vec{u}(-3;2)$ ؛ $A\left(0;\frac{3}{2}\right)$ ؛ $\vec{u} = \vec{AB}$

$\begin{cases} x_B - x_A = -3 = x_B - 0 \\ y_B - y_A = 2 = y_B - \frac{3}{2} \end{cases}$ إذن $x_B = -3$ و $y_B = \frac{7}{2}$

أي $B\left(-3;\frac{7}{2}\right)$

11 $\vec{v}\left(-\frac{3}{2};2\right)$ ؛ $M\left(\frac{5}{2};0\right)$ ؛ $\vec{v} = \vec{NM}$

$\begin{cases} x_M - x_N = \frac{5}{2} - x_N = -\frac{3}{2} \\ y_M - y_N = 0 - y_N = 2 \end{cases}$ إذن $x_N = 4$ و $y_N = -2$

أي $N(4;-2)$

12 $\vec{AB}\left(-\frac{5}{2};4\right)$ و $\vec{OC}(-2;7)$ إذن $\vec{AB} \neq \vec{OC}$

13 $A\left(-\frac{2}{3};\frac{2}{3}\right)$ ؛ $B\left(0;-\frac{3}{5}\right)$ ؛ $C\left(-\frac{2}{3};\frac{19}{15}\right)$

$\vec{BA}\left(-\frac{2}{3};\frac{19}{15}\right)$ ؛ $\vec{OC}\left(-\frac{2}{3};\frac{19}{15}\right)$ أي $\vec{CO}\left(\frac{2}{3};-\frac{19}{15}\right)$

إذن $\vec{BA} \neq \vec{CO}$

14 $A\left(-\frac{3}{2};0\right)$ ؛ $B\left(8;\frac{3}{2}\right)$

$x_I = \frac{x_A + x_B}{2}$ و $y_I = \frac{y_A + y_B}{2}$

إذن $x_I = \frac{13}{4}$ و $y_I = \frac{3}{4}$

15 $A(2;5)$ ؛ $B\left(\frac{13}{4};5\right)$ ؛ $O(0;0)$

$\frac{x_A + x_B}{2} \neq 0$ إذن النقطة O مبدأ المعلم ليست منتصف [AB].

16 $A\left(-\frac{21}{5} ; 2\right)$ ؛ $O(0;0)$

$O = \frac{x_A + x_B}{2}$ و $O = \frac{y_A + y_B}{2}$

$O = -\frac{21}{5} + x_B$ أي $x_B = \frac{21}{5}$

$O = 2 + y_B$ أي $y_B = -2$

$B\left(\frac{21}{5} ; -2\right)$. يمكن البرهان كما يلي : B هي نظيرة A بالنسبة إلى O

إذن $x_A = -x_B$ و $y_A = -y_B$.

17 $A\left(0 ; \frac{5}{2}\right)$ ؛ $B(0 ; -7{,}5)$ ؛ $C(-2{,}5 ; 0)$ ؛ $D(2{,}5 ; -5)$

ليكن I منتصف [AB].

$x_I = \frac{x_A + x_B}{2} = 0$ و $y_I = \frac{y_A + y_B}{2} = -5$

ليكن J منتصف [CD].

$x_J = \frac{x_A + x_B}{2} = 0$ و $y_J = \frac{y_A + y_B}{2} = -5$

I و J متطابقتان. أي للقطعتين [AB] و [CD] نفس المنتصف.

يمكن البرهان أن $\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{BD}$ أي أن الرباعي CADB متوازي أضلاع.

18 [AC] هو قطر لمتوازي الأضلاع ABCD. مركز ABCD هو منتصف القطر [AC].

ليكن K منتصف [AC].

$x_K = \frac{x_A + x_C}{2} = \frac{5}{4}$ و $y_K = \frac{y_A + y_C}{2} = -\frac{1}{4}$

19 مركز الدائرة هو منتصف القطر [AB]. ليكن D المركز.

$x_D = -\frac{3}{2}$ و $y_D = -2$

20 $A(0;4)$ ؛ $B(-3;0)$ ؛ $C(0;3)$

$x_M = -\frac{3}{2}$ ؛ $y_M = -2$ و $x_N = 0$ ؛ $y_N = \frac{7}{2}$

$x_N - x_M = \frac{3}{2}$ ؛ $y_N - y_M = \frac{3}{2}$

$\overrightarrow{MN}\left(\frac{3}{2} ; \frac{3}{2}\right)$

21 $A(1;5)$ ؛ $B(2;-7)$

$AB = \sqrt{(2-1)^2 + (-7-5)^2} = \sqrt{1+144} = \sqrt{145}$

$AB \approx 12{,}04$

22 $A(1;2)$ ؛ $B(-1;3)$

$OA = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$ ؛ $OB = \sqrt{(-1)^2 + 3^2} = \sqrt{10}$

$AB = \sqrt{(-1-1)^2 + (3-2)^2} = \sqrt{5}$

$OB^2 = 10$ ؛ $OA^2 = 5$ ؛ $AB^2 = 5$

$OB^2 = OA^2 + AB^2$ إذن المثلث AOB قائم في O و هو متساوي الساقين.

23 $A(1;1)$ ؛ $B(1;0)$ ؛ $C(2;-1)$

$AB^2 = (-1-1)^2 + (0-1)^2 = 4 + 1 = 5$

$AC^2 = (2-1)^2 + (-1-1)^2 = 1 + 4 = 5$

$BC^2 = (2-(-1))^2 + (-1-0)^2 = 10$

$BC^2 = AB^2 + AC^2$

إذن ABC مثلث قائم في A و متساوي الساقين.

24 $A(1;0)$ ؛ $B\left(\frac{1}{2} ; \frac{\sqrt{3}}{4}\right)$ ؛ $B\left(-\frac{1}{2} ; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$AB^2 = \left(-\frac{1}{2} - 1\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{4} - 0\right)^2$

$= \frac{9}{4} + \frac{3}{4} = \frac{12}{4} = 3$

$AC^2 = \left(-\frac{1}{2} - 1\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{3}}{4} - 0\right)^2 = \frac{9}{4} + \frac{3}{4} = 3$

$BC^2 = \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 0 + \left(\sqrt{3}\right)^2 = 3$

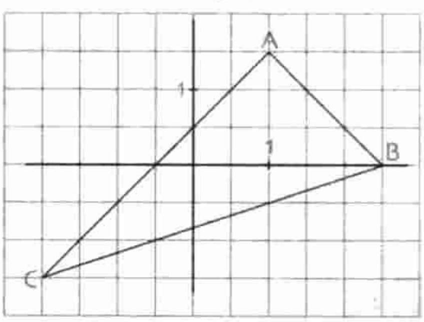
$AB = AC = BC$ إذن المثلث ABC متقايس الأضلاع.

$OA^2 = 1$ ؛ $OB^2 = 1$ ؛ $OC^2 = 1$

$OA = OB = OC$. مركز الدائرة المحيطة بالمثلث ABC هو مبدأ المعلم.

25 $A\left(1 ; \frac{3}{2}\right)$ ؛ $B\left(\frac{5}{2} ; 0\right)$ ؛ $C\left(-2 ; -\frac{3}{2}\right)$

1. التمثيل. حسب التمثيل المثلث ABC قائم في A.



2. $BC^2 = \frac{90}{4}$

$AC^2 = \frac{72}{4}$

$AB^2 = \frac{18}{4}$

$BC^2 = AC^2 + AB^2$

المثلث ABC قائم في A.

وتره [BC].

3. مركز الدائرة المحيطة بالمثلث القائم ABC هو منتصف وتره أي منتصف [BC]. فاصلة المركز K هي $x_K = \frac{1}{4}$ ترتيب المركز K هو $y_K = -\frac{3}{4}$.

26 $A(2;2)$ ؛ $B(-1;-1)$ ؛ $C(-2;-2)$ ؛ $D(1;1)$

1. نلاحظ أن للنقطتين A و C إحداثيين متعاكسين إذن O منصف [AC].

• نلاحظ أن للنقطتين B و D إحداثيين متعاكسين إذن O هو منصف [BD].

2. ليكون المستقيمان (AC) و (BD)

$\overrightarrow{AC}(-4;-4)$ ؛ $\overrightarrow{BD}(2;2)$ ؛ $\overrightarrow{AC} = -2\overrightarrow{BD}$ إذن (AC) يوازي (DB).

3. النقط A، B، C، D على استقامة واحدة.

27 1. $M(x\,;y)$

$$OM^2 = (x_M - x_O)^2 + (y_M - y_O)^2$$
$$= (x-0)^2 + (y-0)^2$$
$$= x^2 + y^2$$

2. $OA^2 = (-3)^2 + 2^2 = 13$ إذن $OA = \sqrt{13}$

$OB^2 = 0^2 + (-5)^2 = 25$ إذن $OB = 5$

$OC^2 = 1^2 + 0^2 = 1$ إذن $OC = 1$

3. A، B، C لا تبعد بنفس المسافة عن O إذن O ليست مركز الدائرة المحيطة بالمثلث ABC.

28 1. $A(-2\,;2)$ ؛ $B(0\,;-2)$ ؛ $C(3\,;2)$

$OA^2 = 8$ ؛ $OB^2 = 4$ ؛ $OC^2 = 13$

$OB^2 = 4$ ؛ B هي النقطة الوحيدة التي تبعد عن مركز الدائرة بمسافة تساوي نصف قطر الدائرة.

B هي النقطة الوحيدة التي تشملها الدائرة $(\mathscr{C})$.

2. $M(x\,;1)$ مع $x > 0$. M نقطة من الدائرة $(\mathscr{C})$.

$OM^2 = x^2 + 1 = 4$

$x^2 = 3$ إذن $x = \sqrt{3}$

29 $A(0\,;-2)$ ؛ $B(0\,;2)$

$OA = OB = 2$ إذن A و B نقطتان من الدائرة $(\mathscr{C})$.

1. $AB^2 = 0^2 + 4^2 = 4^2$ إذن $AB = 4$

نصف القطر هو 2 و القطر هو 4 إذن [AB] قطر في الدائرة $(\mathscr{C})$.

2. $M(1\,;\sqrt{3})$ و $OM^2 = 4$ إذن $OM = 2$

إذن M نقطة من الدائرة و بما أن [AB] قطر فإن AMB قائم في M.

30 $A(-2\,;0)$ ؛ $B(0\,;-2)$

1. $x_I = -1$ إذن $y_I = -1$ إذن $(-1\,;-1)I$.

2. $OI^2 = 2$ إذن $OI = \sqrt{2}$ ؛ $AB^2 = 4 + 4 = 8$ و $\frac{AB}{2} = \sqrt{2}$

إذن O نقطة من الدائرة التي قطرها [AB].

13 - الدوران - الزوايا و المضلعات المنتظمة

1 الجمل الصحيحة هي 2 ؛ 4 ؛ 5 ؛ 8.

2 • صورة E هي G بالدوران الذي مركزه O و زاويته °50 في اتجاه السهم.

• صورة B هي A بالدوران الذي مركزه O و زاويته °40 في الاتجاه المعاكس للسهم.

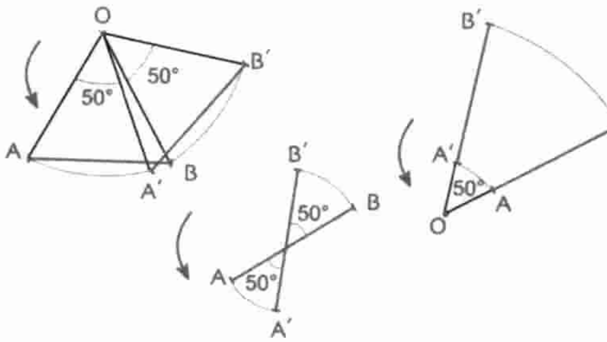
• صورة F هي S بالدوران الذي مركزه O و زاويته °60 في الاتجاه المعاكس للسهم.

3 • صورة A هي C بالدوران الذي مركزه O و زاويته °70 في اتجاه السهم.

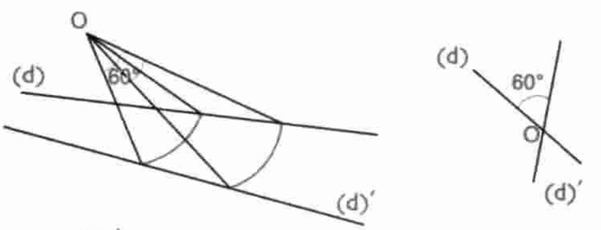
• صورة G هي K بالدوران الذي مركزه O و زاويته °20 في اتجاه السهم.

• صورة K هي S بالدوران الذي مركزه O و زاويته °90 في الإتجاه المعاكس للسهم.

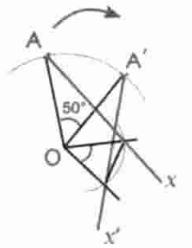
4



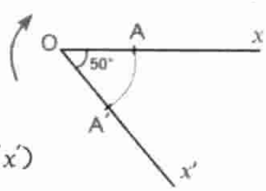
5

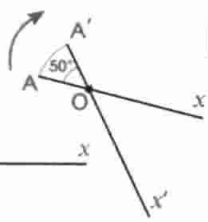


6

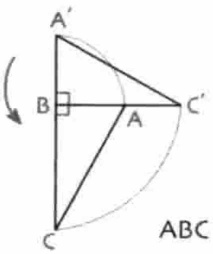


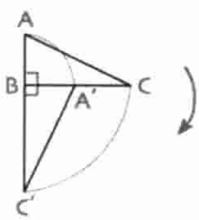
[Ax) صورة [A′x′)





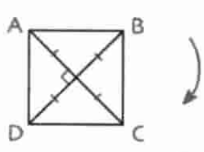
7





ABC صورة A′BC′

8 صورة ABCD هي ABCD.



$A \longmapsto B$

$B \longmapsto C$

$C \longmapsto D$

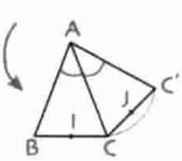
$D \longmapsto A$

9 $B \longmapsto C$

$A \longmapsto A$

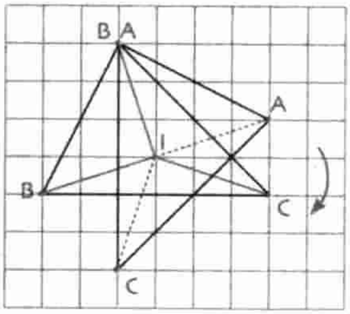
$C \longmapsto C'$

ABC صورة ACC′

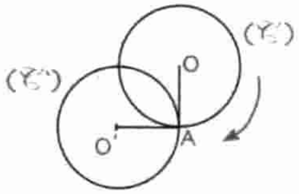


صورة I هي J منتصف [CC′].

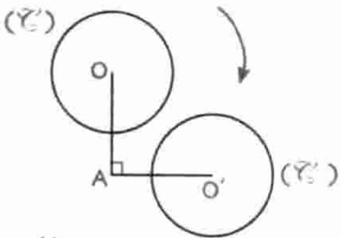
10 A B C' صورة
ABC و هو A AC



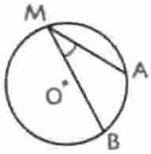
11 (𝒞) صورة (𝒞')
O صورة O
OA = O A
للدائرتين نفس نصف القطر.



12 (𝒞) صورة (𝒞')
O صورة O
للدائرتين نفس نصف القطر.

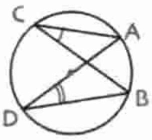


13 $\widehat{AMB}$ زاوية محيطية لأن رأسها نقطة من الدائرة و ضلعاها وتران.



14 توجد وضعيات أخرى للنقطتين M و N.

15 $\widehat{ACB}$ و $\widehat{ADB}$ زاويتان محيطيتان تحصران القوس $\overset{\frown}{AB}$.

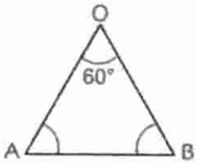


16 $\widehat{AMB} = 90°$ ؛ $\widehat{MBA} = 30°$ ؛ $\widehat{MOB} = 120°$
$\widehat{OMB} = 30°$ ؛ $\widehat{BIJ} = 45°$

17 $\widehat{MOA} = 60°$ ، المثلث MOA متقايس الأضلاع
إذن $MA = OA = 3$
AMB قائم في M. $MB^2 = AB^2 - AM^2 = 6^2 - 9 = 27$
$MB \approx 5{,}2$ و $MO \approx 5{,}2$

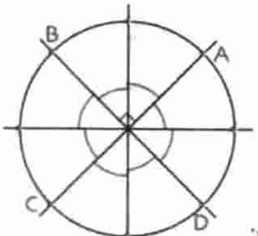
18 $\widehat{AOB}$ زاوية مركزية قيسها 60° تحصر القوس $\overset{\frown}{AB}$.
$\widehat{AMB}$ زاوية محيطية تحصر القوس $\overset{\frown}{AB}$. إذن $\widehat{AMB} = \frac{\widehat{AOB}}{2} = 30°$

19 $\widehat{AOB}$ زاوية مركزية تحصر القوس $\overset{\frown}{AB}$.
الزاوية $\widehat{AMB}$ زاوية محيطية تحصر القوس $\overset{\frown}{AB}$
$\widehat{AOB} = 2\,\widehat{AMB} = 60°$
إذن المثلث AOB متقايس الأضلاع
و بالتالي $AB = OA = 2\text{ cm}$

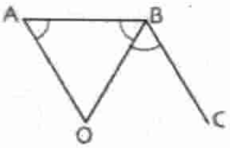


20 $\widehat{BAD}$ زاوية محيطية تحصر القوس $\overset{\frown}{BD}$.
$\widehat{BOD}$ زاوية مركزية تحصر القوس $\overset{\frown}{BD}$.
$\widehat{BAD} = \frac{1}{2}\,\widehat{BOD} = 75°$

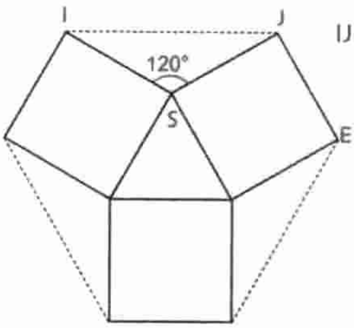
21 1. الشكل.
2. قطرا ABCD متناصفان، متقايسان و متعامدان إذن ABCD مربع.
3. محاور الأضلاع هي منصفات الزوايا المركزية. كل زاوية مركزية تساوي 45°.
و الرؤوس تقع على دائرة إذن الثماني منتظم.

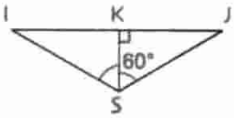


22 $\widehat{AOB} + 2\,\widehat{ABO} = 180°$
$\widehat{ABC} = 2\,\widehat{ABO}$
$\widehat{ABC} + \widehat{AOB} = 180°$

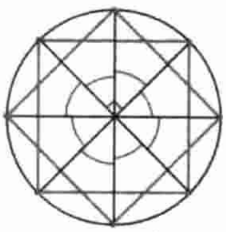


23 السداسي المحصل عليه غير منتظم لأن أضلاعه غير متقايسة.
$IJ = 2\,KJ = 2SJ\,\frac{\sqrt{3}}{2} = SJ\sqrt{3}$
و بما أن $JE = SJ$ فإن $IJ > JE$

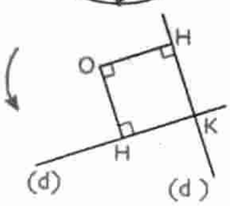




24 الرؤوس الثمانية تقع على دائرة
و الزوايا المركزية متقايسة.
إن الثماني المحصل عليه ثماني منتظم.



25 OHKH مربع.
إذن المستقيمان (d) و (d') متعامدان.



26 1. لدينا : $\widehat{PAM} = 120°$

$\widehat{MCQ} = 120°$: $\widehat{QBP} = 120°$

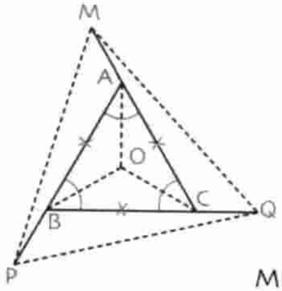
و لدينا أيضا : $PA = BQ = MC$

و $AM = BP = CQ$ ينتج أن المثلثات

PAM ، MCQ ، QBP متقايسة

مثنى مثنى و بالتالي: $MP = PQ = QM$

إذن المثلث MPQ متقايس الأضلاع.



2. نعتبر الدوران الذي مركزه هو مركز الدائرة المحيطة بالمثلث ABC

• صورة نصف المستقيم [CA) هي نصف المستقيم [AB).

• [CM] تقايس [AP] إذن صورة M هي P.

نبين بنفس الطريقة أن صورة P هي Q و صورة Q هي M.

• ينتج أن صورة المثلث MPQ هي MPQ نفسه.

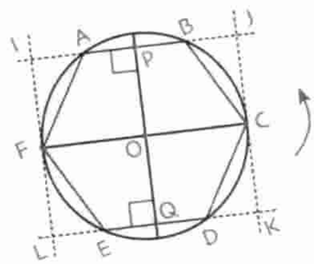
نعلم أن مركز كل دوران يحول مضلعًا منتظمًا إلى نفسه هو مركز الدائرة المحيطة بهذا المضلع.

إذن النقطة O هي مركز الدائرة المحيطة بهذا المضلع أي مركز الدائرة المحيطة بالمثلث ABC هو مركز الدائرة المحيطة بالمثلث MPQ.

27 1. $IJ = FC$ و $PQ = IC$

$PQ < FC$

$IJ > JK$ إذن IJKL ليس مربعا.



2. $AB = AF$ و $IJ = x + 2\,IA$

$IA = \frac{x}{2}$

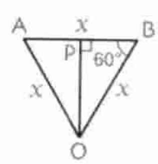
$IJ = x + \frac{2x}{2} = 2x$

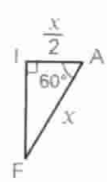
$IJ = 2x$

$JK = 2\,OP$

$OP = OB\,\frac{\sqrt{3}}{2} = x\,\frac{\sqrt{3}}{2}$

$JK = x\sqrt{3}$





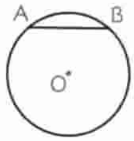
3. $x = 60\text{ cm}$ و $IJ = 120\text{ cm}$ (قيمة مضبوطة)

$JK = 104\text{ cm}$ (بتقريب 1 mm)

14 - الهندسة في الفضاء الكرة الجلة - المقاطع المستوية

1 الجمل الصحيحة هي 2 ؛ 4.

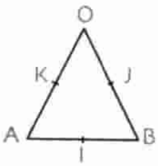
2 A و B نقطتان من الكرة أي [AB] وتر من دائرة كبرى لا يمكن أن يتجاوز الطول 2x1,5 أي طول قطر.



3 المثلث AOB متقايس الأضلاع

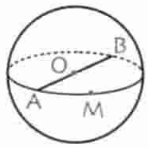
إذن $\widehat{AOB} = \widehat{OAB} = \widehat{OBA} = 60°$

$OI = OA\,\frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$



4 $MA = MB$

M تختلف عن A و B. المستوي الذي يشمل M و A و B يقطع الكرة وفق دائرة كبرى قطرها [AB]. بما أن $\widehat{AMB} = 90°$ فإن M نقطة من هذه الدائرة. و بالتالي M نقطة من الكرة.

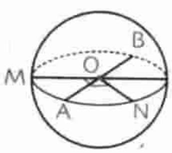


5 $OA = OB$

$\widehat{MON} = 90°$

تمثل الزاوية القائمة.

في الشكل $\widehat{MON}$ يبدو أكبر من 90°.



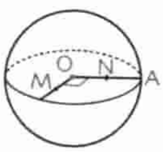
6 $OA = 1{,}5\text{ cm}$

$OM = ON = 1\text{ cm}$

$\widehat{MON} = 90°$

في الشكل $\widehat{MON}$ تبدو أكبر من 90°.

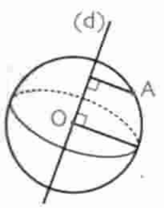
و ON يبدو أصغر من OM.



7 (d) محور للكرة.

تبعد A بـ 0,5 cm عن (d).

يوجد كل من المحور و النقطة A في مستوي الورقة.

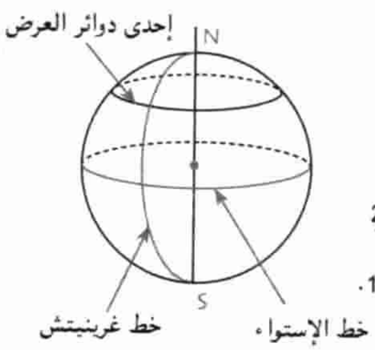


8 1. الشكل.

2. المسافة المطلوبة هي نصف طول أحد خطوط الطول أي ربع دائرة كبرى.

المسافة هي $\frac{2\pi \times 6400}{4}$ km

أي 10053 km بتقريب 1 km.



9 1. $v = \frac{4}{3}\pi R^3 = 4\pi R^2 \times \frac{R}{3} = \frac{A \times R}{3}$

2. $\mathcal{A} = 4\,\pi\,R^2 = 4\pi \times (1{,}5)^2$

$\mathcal{A} = 28{,}26\text{ cm}^2$

$\mathcal{V} = \frac{4}{3}\,\pi\,R^3 = \frac{4}{3}\,\pi \times (1{,}5)^3$

$\mathcal{V} = 14{,}13\text{ cm}^3$

10 نصف قطر كرة مساحتها $12,56\ cm^2$.

$$\mathcal{A} = 4\pi R^2 = 12,56$$

$$R^2 = \frac{12,56}{4\pi} \approx 1$$

$R \approx 1\ cm$ بتقريب $1\ mm$

حجم الجلة : $\mathcal{V} = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{\mathcal{A}}{3} R \approx 4,19\ mm^3$ بتقريب $1\ mm^3$.

11 مساحة كرة نصف قطرها $1,5\ cm$.

$$\mathcal{A} = 2\pi(1,5)^2 \approx 28,27$$

$$\mathcal{A} \approx 28,27\ cm^2$$

حجم الجلة : $\mathcal{V} = \frac{4}{3}\pi(1,5)^3 = \frac{28,27 \times 1,5}{3}$

$$\mathcal{V} \approx 14,13\ cm^2$$

12 طول قطر الكرة هو طول ضلع المكعب $8 = 2^3$

إذن قطر الكرة هو $2\ cm$ و نصف قطرها $1\ cm$.

13 • المساحة الجانبية للمكعب هي مجموع مساحات 4 أوجه ناقصا مساحة الباب $4(4\times4) = 64$ ؛ $2,5\times1 = 2,5$

• المساحة الجانبية هي $61,5\ m^2$.

• مساحة السقف عبارة عن مساحة مربع ناقصا مساحة قرص قطره هو قطر الكرة زائدا مساحة نصف كرة. $300\ cm = 3\ m$

$$4\times4 - \pi\frac{3^2}{4} + \frac{4\pi}{2} \times 1,5^2 = 16 - 2,25\pi + 4,5\pi$$

$$= 16 + 2,25\pi \approx 23,1$$

• المساحة الكلية القابلة للطلي بالجير هي مجموع المساحتين أي $84,6\ m^2$ بتقريب $1\ m^2$.

• كتلة الجير اللازمة هي $22\ kg$ بتقريب $1\ kg$.

14 حجم الحديد المكون للجلة المفرغة هو فرق حجمي جلتين، الأولى خارجية قطرها $12\ cm$ و الثانية داخلية قطرها $(12 - 4)cm$ أي $8\ cm$.

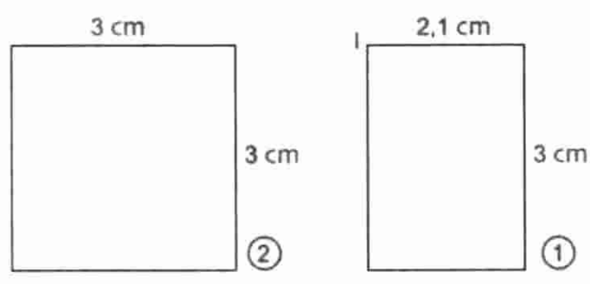
انصاف الأقطار هما 6 و 4 على الترتيب.

حجم الجلة هو $\frac{4}{3}\pi(6^2 - 4^2)$

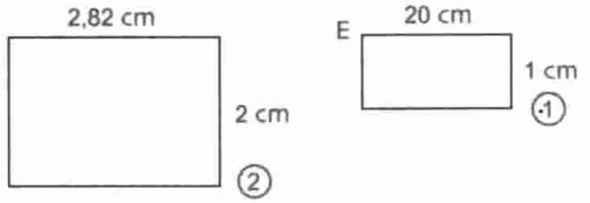
$$\frac{4}{3}\pi(216 - 64) \approx 636,7$$

حجم الجلة هو $636,7\ cm^3$ بتقريب $1\ cm^3$.

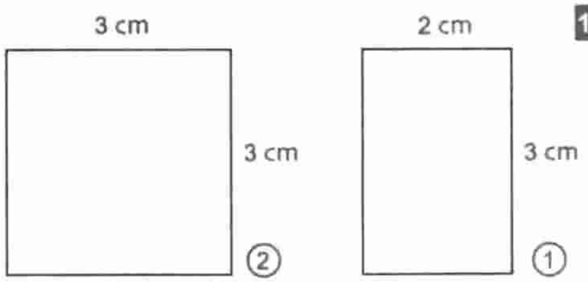
15 $1,5\sqrt{2} \approx 2,1\ cm$ إذن $IJ \approx 2,1\ cm$



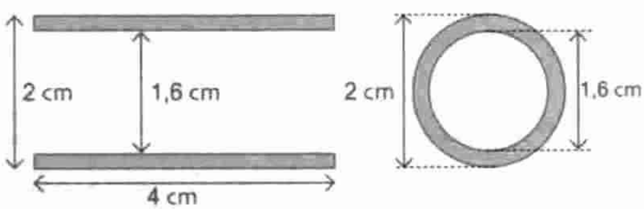
16 $2\sqrt{2} \approx 2,82\ cm$



17



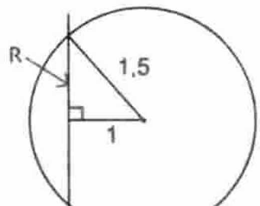
18

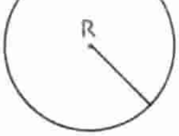


19 R هو نصف قطر المقطع.

$$R^2 = (1,5)^2 - 1^2 \approx 1,25$$

$$R \approx 1,12\ cm$$





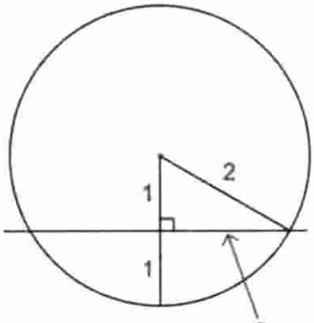
المقطع

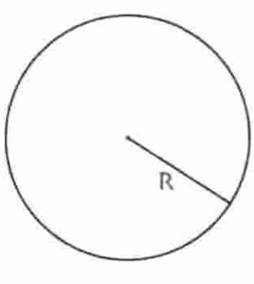
20 R هو نصف قطر المقطع.

$$R^2 = 2^2 - 1^2$$

$$R = \sqrt{3}$$

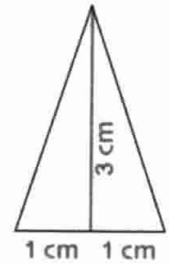
$$R \approx 1,73$$





المقطع

21 المقطع

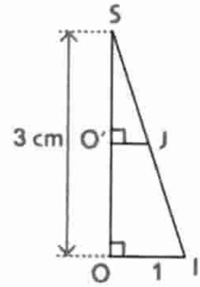


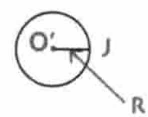
22 O منتصف [SO]

$SO = \frac{1}{2}\ OI = 0{,}5$

R هو نصف قطر المقطع

$R = 0{,}5\ cm$





23 القاعدة هي مثلث متقايس الأضلاع

$\frac{SO'}{SO} = \frac{3-2}{3} = \frac{1}{3}$ إذن طول ضلع قاعدة المقطع هو $\frac{1}{3}$

$\left(\frac{1}{3} \times 2\right)$ أي $0{,}7\ cm$ بتقريب $1\ mm$

24 نسبة تكبير أبعاد $(\mathcal{F}_2)$ هي 2.

نسبة تصغير أبعاد $(\mathcal{F}_1)$ هي $\frac{1}{2}$.

نضرب أبعاد $(\mathcal{F}_1)$ في $\frac{1}{2}$ للحصول على $(\mathcal{F}_2)$.

نضرب أبعاد $(\mathcal{F}_2)$ في 2 للحصول على $(\mathcal{F}_1)$.

25 تمثل مساحة $(\mathcal{F}_2)$ 25% من مساحة $(\mathcal{F}_1)$.

تمثل مساحة $(\mathcal{F}_1)$ 400% من مساحة $(\mathcal{F}_2)$.

26 يكبر نصف القطر بنسبة 25% يعني يضرب في 1,25 و تضرب مساحتها في $(1{,}25)^2$ أي تضرب في 1,56 إذن تكبر المساحة بنسبة 56% يضرب الحجم في $(1{,}25)^3$ أي في 1,95 يكبر الحجم بنسبة 95%.

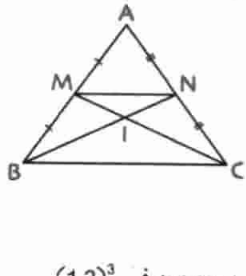
27 المثلثان IMN و BIC في وضعية طالس

إذن $\frac{IM}{IC} = \frac{IN}{IB} = \frac{MN}{BC} = \frac{1}{2}$

IMN تصغير للمثلث BIC بنسبة $\frac{1}{2}$.

نسبة تصغير المساحة هي $\frac{1}{4}$.

يقدر التصغير بـ %(25 - 100) أي 75%.



28 تضرب أبعاد المخروط في (1,3) و يضرب حجمه في $(1{,}3)^3$

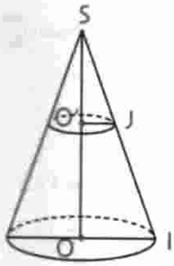
أي في 2,2 إذن يكبر الحجم بـ 220 %.

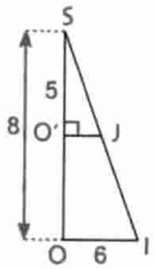
29 1. $\frac{O'J}{OI} = \frac{5}{8} = \frac{O'J}{6}$

و بالتالي $O'J = \frac{6 \times 5}{8}$

$O'J = 3{,}75$

القطر هو 7,5 cm





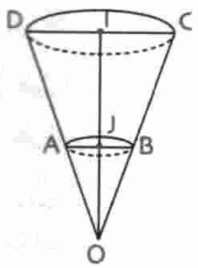
2. $\mathcal{V}$ الحجم الأصلي. $\mathcal{V}'$ حجم المخروط العلوي

نسبة $\mathcal{V}'$ على الحجم $\mathcal{V}$ هي $\left(\frac{5}{8}\right)^3$ أي 0,24 بتقريب $\frac{1}{100}$

يمثل $\mathcal{V}'$ 24% من $\mathcal{V}$.

30 سعة الخزان هي فرق سعتي مخروطين أحدهما تصغير لآخر.

$\mathcal{V}$ هي سعة الخزان



$$\mathcal{V} = \frac{\pi IC^2 \times OI}{3} - \frac{\pi JB^2 \times OJ}{3}$$

$$= \frac{\pi}{3}\left(IC^2 \times 10 - 1{,}5^2 \times 5\right)$$

$$\frac{JB}{IC} = \frac{OJ}{OI}$$

$$IC = 1{,}5 \times \frac{10}{5} = 3$$

بعد التعويض و الحساب نجد $\mathcal{V} \approx 82{,}5\ m^3$

31 1. حجم المكعب $\mathcal{V}_1 = 8^3$. إذن $\mathcal{V}_1 = 512\ cm^3$

حجم الهرم $\mathcal{V}_2 = \frac{8 \times 8 \times 8}{3}$. إذن $\mathcal{V}_2 = 170{,}7\ cm^3$

$\frac{\mathcal{V}_2}{\mathcal{V}_1} = \frac{1}{3}$. نسبة حجم الهرم على حجم المكعب هي $\frac{1}{3}$.

2. حجم المخروط $\mathcal{V}_2 = \frac{\pi}{3}\frac{8^2}{4} \times 8$

لدينا $\frac{\mathcal{V}_3}{\mathcal{V}_1} = \frac{\pi}{12}$ $\frac{\pi}{12} = \frac{1}{3} \times \frac{\pi}{4}$

$\pi < 4$ إذن $\frac{\pi}{4} < 1$ و بالتالي $\frac{\pi}{12} < \frac{1}{3}$. ينتج أن $\frac{\mathcal{V}_3}{\mathcal{V}_1} < \frac{\mathcal{V}_2}{\mathcal{V}_1}$

32 قيس الزاوية المركزية هي $25^\circ - 10^\circ$ أي 15°

المسافة بين المدينتين هي طول القوس $\overset{\frown}{AB}$ من الدائرة التي طولها 40 000 km.

لدينا : $\frac{\text{طول } \overset{\frown}{AB}}{15} = \frac{40\,000}{360}$ المسافة هي 1667 km بتقريب 1 km.

33 لدينا $\frac{\pi R^2 \times h}{3} = \frac{C^2 \times h}{3}$

$\frac{C^2}{R^2} = \pi$ و منه $\frac{C}{R} = \sqrt{\pi}$

34 $\mathcal{V}_1$ حجم المخروط $\mathcal{V}_1 = \frac{\pi R^2 h}{3}$

$\mathcal{V}_2$ حجم الهرم $\mathcal{V}_2 = \frac{(2R)^2 h}{3}$ ؛ $\frac{\mathcal{V}_1}{\mathcal{V}_2} = \frac{\pi}{4}$

أخي - أختي

إن استفدت من هذا

الكتاب فالرجاء أن تدع لي

و للمؤلف بالثواب الجميل

و المغفرة و النجاح

hard_equation

٨٨

صمم كتاب الرّياضيّات للسنة الرابعة من التعليم المتوسط بشكل يجعله يترجم بدقة و صرامة متطلبات المنهاج الرسمي المقرر من طرف وزارة التربية الوطنية، في إطار إصلاح المنظومة التربوية، و فق المقاربات البيداغوجية الجديدة. و يهدف إلى تحفيز المتعلم على البحث، الاكتشاف و البناء من خلال أنشطة و وضعيات ذات دلالة، كما تسمح له بممارسة التقويم الذاتي، من أجل تمدرس مفيد و فعال.

يشمل هذا الكتاب أكثر من 440 تمرينا و مسائل محلولة.

9 789961 638255

CHIHAB